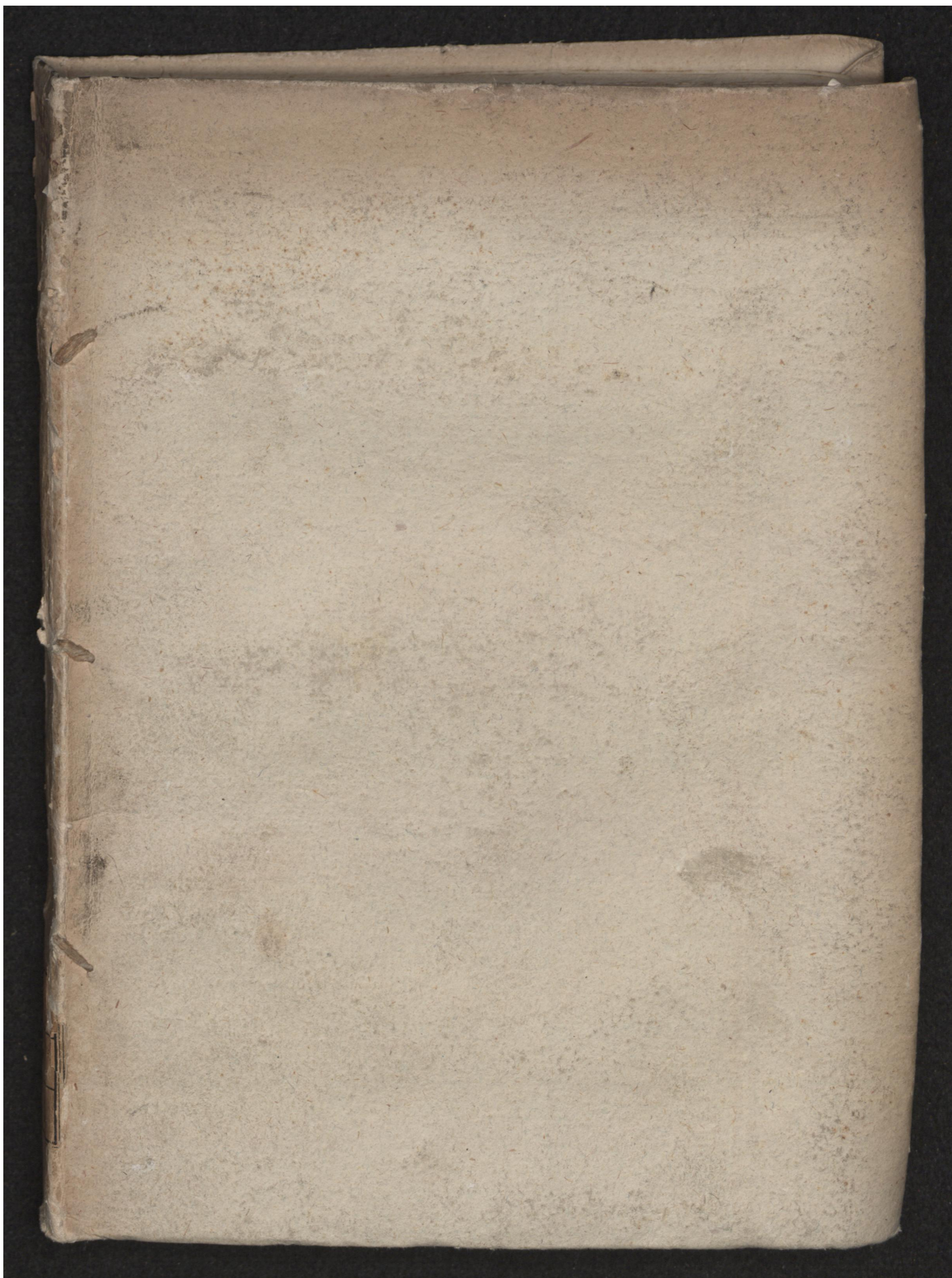
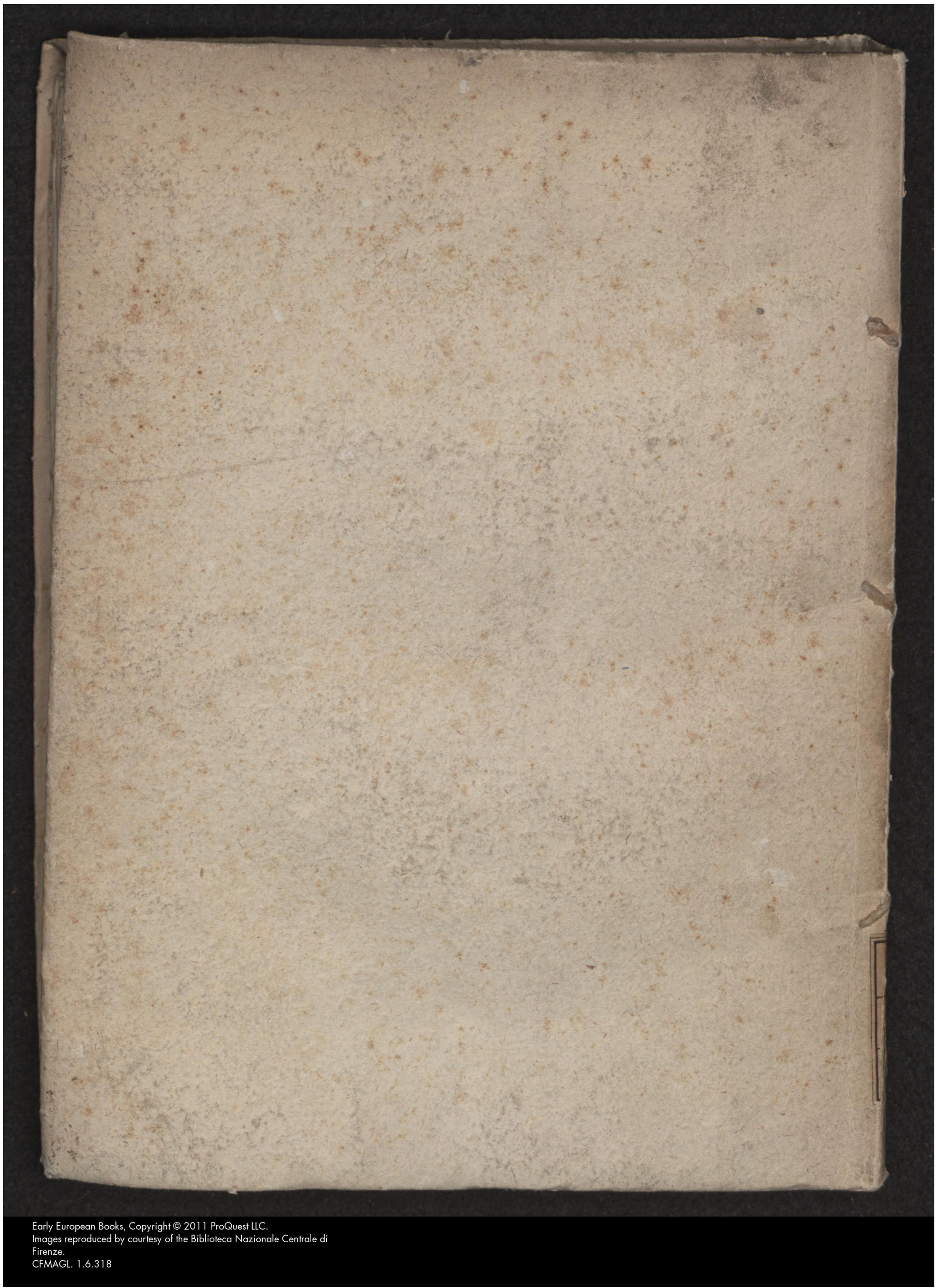






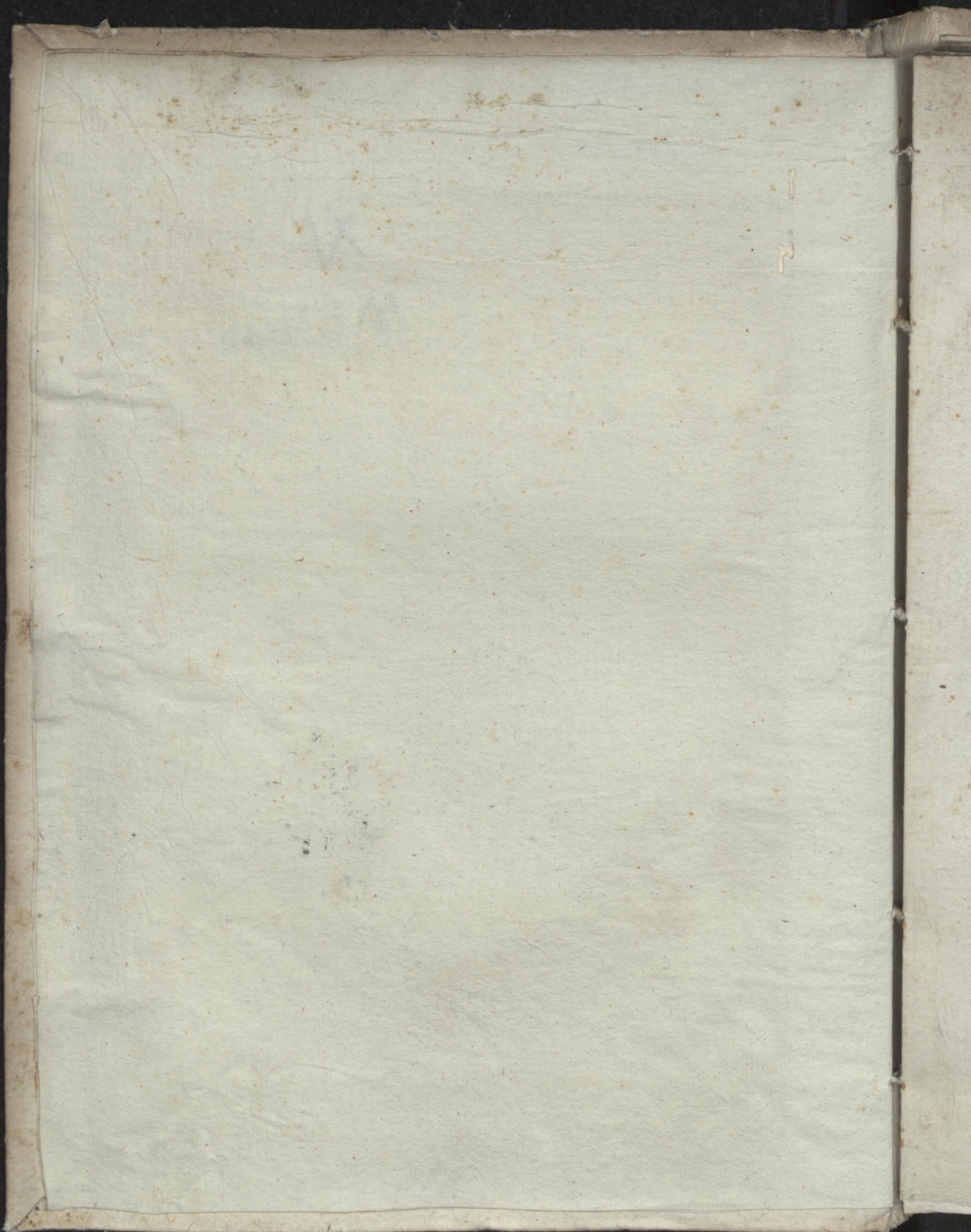






XI

MENG



# NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ,

SEV

# De Additione Fractionum:

*PETRI MENGOLI*
*Art. & Phil. Doct.*

Illustrissimis, & Sapientissimis

CIVITATIS BONONIÆ
SENATORIBVS.

Men






Bononiæ, ex Typographia Iacobi Montij.
*Superiorum permissu. 1650.*

# ILLVSTRISSIMI PATRES



Ereor quìn veſtris auribus, Patres Ampliſs. conſona hęc numerorũ congeries diſſonare videatur: at innumeris meritis innumeram numerorum ſeriem deberi quis deneget? Arenas maris, ſtellarum numerum, niuis exagonæ multitudinem examinandam contemnerẽ, dum veſtræ fiſus humanitati infinitum metiri minimè dubitaui. Fronti nunquam melior ſucceſsit ſudor, calamus potiori nunquam vndauit atramento, eo quod veſtro nomini, meo veluti numini conſecratur. Hæ meæ quæquæ ſint, integritatis fractiones, quia minimæ ſunt quantitatis, ipſum munus exile profitentur; quia verò in ſingulis diſpoſi-

tionibus infinitæ colliguntur, vestræ non minus humanitatis, quàm obsequij mei numerant argumenta. Vester labor est, Patres Illustriss. dum meis lucubrationibus munificentissimo imperio laborastis: vester, inquam, labor est, cui vestri cætus, nostrique sæculi Apollo amplissimæ lucis impendium erogauit. Spinosa hæc Matheseos dumeta è rigidis acutissimæ artis spinis verecundiæ meæ rosas collecturi respicere ne dedignemini. Valete.

Illustriss. DD. VV.

Seruus humillimus
*Petrus Mengolus.*

# PRÆFATIO



*Editanti mihi persæpe Archimedis parabolæ Quadraturam, propterquam infinita triangula in continuè quadrupla proportione existentia certos limites quantitatis non excedunt; occurrit vniuersalis illa Quadratura eiusdem argumenti occasione a Geometris demõstrata, qua magnitudines infinitæ continuam quamlibet proportionem maioris inæqualitatis possidentes in præfinitas homogeneas quantitates colliguntur. Admirabile sanè Theorema: cuius contemplatione in eam quæstionem inductus sum, vtrum magnitudines ea quacunq; lege dispositæ, vt aliqua possit assumi minor qualibet proposita, vel vt deficientes in infinitum euanescant, infinitæ compositæ omnem propositam quantitatem valeant superare.*

*In huiusmodi causæ experimentũ Arithmeticas fractiones tẽtare agressus, eas ità disposui, vt singulas vnitates singulis post vnitatem nu-*

*meris*

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$

*meris denominarem, in qua quidem dispositione sumi potest magnitudo minor qualibet assignata, & propterea ipsæ magnitudines ad ordinis incrementum quantitate decrescentes in infinitum euanescunt.*

*Causam igitur in assumptæ dispositionis terminis proponens quærebam, vtrum vnitates denominatæ singulis numeris post vnitatem in infinitum dispositæ, & aggregatæ infinitam aliquam, vel finitam componerent extensionem. Pro finita extensione respondendum videbatur; quòd numerorum, & fractionum contrariæ sint potestates, numerorum quidem in multiplicatione, qua magnitudines versus infinitum progrediuntur, fractionum verò in diuisione, qua res ad ipsa indiuisibilia reducitur: aggregati autem numeri superant quamlibet propositam quantitatē; ergo à contrario sensu aggregatæ fractiones non videntur posse quamlibet propositā magnitudinem excedere. Hoc sophisma toto ferè mense fuit expectatio-*

nis

nis argumentum, quòd pro hac parte Geometricam in causa ferre possem sententiam: atqui dum processum demõstrationis examino, iudicium in alterius partis fauorem conuertitur.

Ea est ratio, quia in propositis fractionibus æquales magnitudines numeris Arithmeticè dispositis denominantur, & propterea tres consequentes, vtpote A, B, C, sunt Harmonicè disposita, & A, ad C, eamdem habet proportionem, quam excessus, A, B, ad excessum B, C: est autem A, maior C; ergo excessus A, B, maior est excessu B, C; & aggregatum A, C, maius duplo B; & aggregatum ex ternis A, B, C, maius triplo mediæ B. Hoc igitur argumento fractiones in proposita dispositione sumptæ ternæ à prima sunt maiores

| A | B | C |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13} \quad \frac{1}{14}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16}$

triplis medijs: & mediæ sunt vnitates denominatæ numeris à ternario multiplicatis $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$; & earumdem triplæ sunt 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, quæ eodem, quo suprà argumento ternæ sunt

ma-

maiores triplis medijs. Ergo fractiones propositæ diſpoſitionis aſsumptæ totidem ſemper ſecundum numeros proportionis continuè ſubtriplæ 3, 9, 27, 81, ſingulas vnitates excedunt. Poſſunt autèm ſumi, pro quouis aſsignato numero, totidem in continua proportione ſubtripla numeri à ternario, iuxtà quorum aggregatum ſumptæ fractiones diſpoſitionis propoſitæ ipſum aſsignatam numerum ſuperabũt: Ergo propoſitæ fractiones in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ infinitam extenſionem valent implere.

Sit exempli gratia numerus aſsignatus 4: & ſumantur à ternario quatuor continuè proportionales in ſubtripla 3, 9, 27, 81, quorum ſumma 120: igitur ſumptæ fractiones in multitudine numeri 120 ſuperant aſsignatum numerum 4; nam tres primæ ſuperant triplum $\frac{1}{3}$, videlicet vnitatem: nouem deinceps ſuperant triplum aggregati $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, videlicet aggregatum $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; ſed huiuſmodi aggregatum ſuperat vnitatem, vt oſtendi; ergo nouem deinceps ſuperant vnitatem: & propter eam-

dem

dem demonstrationem 27, & 81 subsequentes singulas vnitates excedunt.

Hinc duo Corollaria processere. Primum, quòd eadem dispositio à quocunque ordinetur principio in infinitum extenditur; vtpote si dispositarum fractionum prima sit $\frac{1}{5}$, & aliæ deinceps adhuc ipsam dispositionem propositum

$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{8}\quad\frac{1}{9}\quad\frac{1}{10}\quad\frac{1}{11}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{13}\quad \&c.$$

quemuis numerum superare posse: finitum enim est aggregatum ex ijs, quæ sunt omissæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, & finiti ab infinito substractio finitum relinquere non potest.

Alterum, quòd infinitarum fractionum dispositio, in qua singulæ vnitates a singulis numeris Arithmeticè proportionalibus denominantur, pariter in infinitum extenditur. Fiat huiusmodi dispositio A, cuius primam fractionem denominet numerus B, & excessus Arithmeticè proportionalium sit C, & sub singulis fractionibus dispositionis A, ab eodem principio fiat dispositio D, fractionum, in quibus vnitates denominantur omnibus numeris



à B.

B—10

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{14}$ | B 2, |
| D | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | C 3. |

*à B. Quia primi denominatores in diſpoſitionibus A, D, ſunt æquales, alter minor eſt quàm vt ad alterum eamdem habeat proportionem, quam C, ad vnitatem; & colligendo ſecundus in diſpoſitione A, minor eſt quàm vt ad ſecundum in diſpoſitione D, eamdem habeat proportionem: ſunt autèm fractiones eumdem habentes numeratorem in reciproca proportione denominatorum; ergo prima, ſecunda, & ſingulæ deinceps fractiones diſpoſitionis D, ſunt minores quàm vt ad primem, ſecundam, & ſingulas deinceps diſpoſitionis A, eamdem habeant proportionem, quam C, ad vnitatem; & colligendo, tota diſpoſitio D, minor eſt quàm vt ad totam diſpoſitionem A, eamdem habeat proportionem, quam C, ad vnitatem. Igitur ſi extenſionis A, quantitas aſsignatur; etiam eiuſdem extenſionis multiplam ſecundum numerum C, quantitatem neceſſe eſt aſsignari, quæ infinita extenſione D, ſit*

*maior;*

maior; quod est absurdum, Ergo extensio infinitarũ fractionũ dispositionis A, est infinita.

Dimissis igitur hisce dispositionibus quantitatis iurisdictionem superantibus, eamdem contemplationem instituere capi de fractionibus, in quibus vnitates à numeris triangulis denominantur; an videlicet ipsæ etiam quadraturam excluderent, an potius paterentur: Factis ergo de more calculis, & instructa demonstratione, inueni dispositionis huiusmodi quadraturam esse vnitatem:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vnitates denominatæ triangulis | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{36}$ |
| quæ aggregatæ à prima sunt, | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{7}{9}$ |

quòd aggregatæ quotlibet à prima sunt æquales numero multitudinis ipsarum denominato per numerum binario maiorem, & propterea semper vnitate sunt minores eo defectu, qui iuxtà multitudinis additarum fractionum incrementum infrà quãlibet assignatam magnitudinẽ diminuitur, & in infinitũ euanescit.

Præterea in eadem dispositione binæ sumptæ post vnitatem singularum ab vnitate sunt di-

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\qquad \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}\qquad \frac{1}{21}\ \frac{1}{28}\qquad \frac{1}{36}\ \frac{1}{45}$

$\frac{1}{2}\qquad\qquad \frac{1}{6}\qquad\qquad \frac{1}{12}\qquad\qquad \frac{1}{20}$

midię: ergo diuidendo, omnes poſt vnitatem, vnitati ſunt ęquales.

Tandèm ſi eiuſdem diſpoſitionis fractiones

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\qquad \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{28}\qquad \frac{1}{36}\ \frac{1}{45}\ \frac{1}{55}\ \frac{1}{66}\ \frac{1}{78}\ \frac{1}{91}\ \frac{1}{105}\ \frac{1}{120}$

$\frac{1}{2}\qquad\qquad \frac{1}{4}\qquad\qquad \frac{1}{8}$

totidem ſumantur deinceps ſecundùm numeros proportionis continuè ſubduplę à binario, videlicet 2, 4, 8, &c. aggregatę ſunt in continuè dupla proportione; atqui magnitudines duplę proportionis aggregatę infinitę ſunt ęquales duplo primę, cum in noſtro caſu prima ſit dimidium vnitatis, ergo propoſitę fractiones aggregatę infinitę ſunt ęquales vnitati.

Huiuſmodi ſunt, quę in primo pręſentis opuſculi libro demonſtraui de fractionibus, in quibus vnitates denominantur planis omniũ numerorum ab vnitate: quia enim ſinguli trianguli numeri ſingulorum huiuſmodi planorum ſunt dimidij, propter reciprocam pro-

por-

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{72}$ |
| | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{36}$ |

*portionem: singulæ fractiones, in quibus vnitates denominantur triangulis duplæ sunt singularum, in quibus denominantur planis; & ideò vtrique dispositioni eædem conueniunt demonstrationes.*

*Ab huius fractionum dispositionis contemtemplatione fæliciter expeditus, ad aliam progrediebar dispositionem, in qua singulæ vnitates numeris quadratis denominantur. Hæc speculatio fructus quidem laboris rependit, nondùm tamen effecta est soluendo, sed ingenij ditioris postulat adminiculum, vt præcisam dispositionis, quam mihimetipsi proposui, summam valeat reportare.*

*Pro fructibus habetur huius opusculi Theoremata, ea præcipuè, quæ in primo libro demonstrantur, & præterea sequentes propositiones videlicet.*

*1. Vnitates denominatæ compositis ex qua-*

*dratis*

dratis ab vnitate, & lateribus eorumdem, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales vnitati.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Quadrati | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
| Latera | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Compositi | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 |
| Vnitates denominatæ compositis. | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ |

Constat enim, quòd singulæ fractiones huiusce dispositionis congruũt singulis, in quibus vnitates denominantur planis omnium numerorum ab vnitate.

2. Vnitates denominatæ compositis, ex quadratis ab vnitate, & lateribus eorumdem duplis, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{3}{4}$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Quadrati | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
| Laterũ dupli | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| Compositi | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 | 48 |
| Vnitates denominatæ compositis. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{48}$ |

Quia singulæ, quæ sumuntur alternæ à prima, congruunt singulis, quæ denominantur planis

omnium

omnium imparium ab vnitate, & ideò sunt æquales $\frac{1}{2}$. Alternæ verò à secunda congruunt singulis, quæ denominantur planis omnium parium à binario, & propterea sunt æquales $\frac{1}{4}$. Ergo colligendo, omnes sunt æquales $\frac{3}{4}$.

3. Vnitates denominatæ compositis ex quadratis ab vnitate, & lateribus eorumdem triplis disposita in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{11}{18}$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Quadrati | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
| Laterum tripli | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| Compositi | 4 | 10 | 18 | 28 | 40 |
| Vnitates denominatæ compositis. | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{40}$ |

Quia sumpta à prima binis relictis congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate cū excessu 3, & propterea aggregatæ infinitæ sunt æquales $\frac{1}{3}$: Sumptæ autem à secunda binis relictis congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum à 2, cum eodē excessu 3, & sunt æquales $\frac{1}{6}$; Residuæ tandem congruunt vnitatibus, quæ denominantur

planis

planis Arithmeticè dispositorum à 3. cum eodem excessu 3, & ideò sunt æquales $\frac{1}{9}$. Ergo omnes equales sunt aggregatis $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{9}$, videlicet $\frac{11}{18}$.

Et alia huiusmodi Theoremata, eadem pariter methodo demonstraui.

Ad propositam ergo Quæstionē redeo, cuius plura capita contrarias, vt ostendi, merentur sententias. Istorum autem duo solumodo in hoc opusculo mihi videor absoluisse; alterum de fractionibus, in quibus vnitates denominantur productis numerorum Arithmeticè dispositorum; alterum de ijs, in quibus differentiæ dispositorum quomodolibet numerorū eorumdem productis denominantur: præterea eadem in Geometricis quantitatibus demonstrari posse indicaui, præmia solumodò nominum interpretatione, quæ habetur in vltimis definitionibus libri tertij.

In aßumptis autèm capitibus quid questioni respondendum sit, ex sequentibus vnusquisque poterit iudicare.

NOVÆ

# NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ SEV De Additione Fractionum.

## *LIBER PRIMVS.*

In quo tractatur de Fractionibus, quarum ſunt denominatores numeri plani.

Principales Additiones habentur in Propoſitionibus huius libri 7. 8. 13. 23. 37.

Quadraturæ verò in Propoſitionibus 17. 26. 40.

## DEFINITIONES

I.

*Differentiam duarum magnitudinum, quandò prima excedit ſecundam, voco, exceſſum primæ & ſecundæ.*

II.

*Quandò verò prima deficit à ſecunda, voco, defectum primæ, & ſecundæ.*

III.

*Similes differentias, voco, tùm excessus, tùm defectus inter se.*

IV.

*Dissimiles verò exeessus defectibus.*

V.

*Magnitudines Arithmeticè dispositas, voco, quarum (sumptis continuè binis quibuslibet) differentiæ similes antecedentium, & consequentium sunt æquales.*

VI.

*Magnitudines Harmonicè dispositas, voco, quarum (sumptis continuè ternis quibuslibet) prima se habet ad tertiam, vt differentia primæ, & secundæ ad similem differentiam secundæ, & tertiæ.*

Præterea suppono Lectorem informatum esse de ijs, quæ in Quinto, Septimo, Octauo, & Nono libris Elementorum Euclidis traduntur, quoad capescendas demonstrationes. Nam, quoad ipsas propositiones, & praxim numerosam, sufficit memoriæ mandasse præcepta logisticæ Fractionum, quæ passim penes Arithmeticos leguntur.

Theo-

# Theorema I. Propositio I.

***Trium Arithmeticè dispositorum planum sub extremis medium est Harmonicè inter plana sub singulis extremis, & medio.***

A. 3. B. 5. C. 7.
D. 2.
H. 6. I. 14.
E. 15. G. 21. F. 35.



Int Arithmeticè dispositi tres A, B, C, quorum differentia D, & planum extremorum A C, sit G, plana verò sub singulis extremis, & medio A B, C B, sint E, F. Dico quòd G, medium est Harmonicè inter E, F. Ex multiplicationibus D A, D C, producantur H, I; ergo vt A, ad C, ita est H, ad I: & quia E, F, sunt plana B A, B C; ergo E, ad F, est vt A, ad C, vel vt H, ad I: quoniam A, multiplicando B, C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam B, C, producit similem differentiam E, G; & multiplicando D, producit H; est autem D, differentia B, C; ergo H, est differentia E, G, similis differentiæ B, C, vel differentię A, B: Similiter demonstrabimus quòd I, est differentia G, F, similis differentiæ A, B, vel E, G: ergo E, ad F, est vt differentia E, G, ad similem differentiam G, F. Ergo G, medium est Harmonicè inter E, F. Quod erat demonstrandum. Def. 6.

# Theorema 2. Propoſ. 2.

*Trium Harmonicè diſpoſitorum planum ſub extremis medium eſt Arithmeticè inter plana ſub ſingulis extremis, & medio.*

A. 3 B. 4. C. 6.
H. 1. I: 2.
D. 6.
E. 12. G. 18. F. 24.

SInt Harmonicè diſpoſiti tres A, B, C, & planum extremorum A C, ſit G, plana verò ſub ſingulis extremis,& medio A B, C B, ſint E, F. Dico quòd G, medium eſt Arithmeticè inter E, F. Sint H, & I, differentiæ ſimiles A,B, & B, C; ergo vt A, ad C, ita eſt H, ad I, & productum A I, eſt æquale producto C H. Sit huiuſmodi productum D: quoniam A, multiplicando B, C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam, B, C producit ſimilem differentiam E, G; & multiplicando I, producit D; eſt autem I, differentia B, C; ergo D, eſt differentia E, G, ſimilis differentiæ B, C, vel A, B: Similiter demonſtrabimus quòd D eſt differentia G, F, ſimilis differentiæ A, B, vel E, G: ergo differentiæ E, G, & G, F, ſunt æquales, & ſimiles. Ergo G, medium eſt Arithmeticè inter E, F. Quod, &c.

Def. 6. (margin, beside "les A,B, & B, C; ergo vt A, ad C…")
Def. 5. (margin, beside "differentiæ A, B, vel E, G…")

## DEFINITIO VII.

*Vnam magnitudinem altera denominatam, voco, quamlibet fractionem, in qua vna ma-*

*magnitudo stat loco numeratoris, altera verò loco denominatoris.*

## Theor. 3. Propos. 3.

*Eadem magnitudine tribus Harmonicè dispositis denominatæ fiunt fractiones Arithmeticè dispositæ.*

| | | |
|---|---|---|
| | A. 1. | |
| B. 3. | C. 4. | D. 6. |
| E. $\frac{1}{3}$ | F. $\frac{1}{4}$, | G. $\frac{1}{6}$ |
| H. 12. | K. 18. | I. 24. |

DEnominetur A, magnitudo tribus Harmonicè dispositis B, C, D, vt fiant fractiones E, F, G. Dico, quòd E, F, G, sunt Arithmeticè dispositæ. Ex multiplicationibus C B, C D, B D, producantur H, I, K; ergo, quia B, C, D, sunt Harmonicè dispositi, K, medius est Arithmeticè inter H, I: & quia I, K, sunt producti D C, D B; ergo I, ad K, est vt C, ad B; & ex denominatione A, per C, & B, fiunt fractiones F, & E; ergo vt C, ad B, vel vt I, ad K, ita est E, ad F: Similiter demonstrabimus, quòd vt K, ad H, ita est F, ad G; ergo per conuersionem rationis, & exæquo vt I, K, H, sunt Arithmeticè dispositi, sic fractiones E, F, G, sunt Arithmeticè dispositæ. Quod, &c.

## DEFINITIO VIII.

*Defferentias, & plana in aliqua dispositione,*

*voco*

*voco absolutè, differentias, & plana magnitudinum, quæ sunt continuè consequentes in illa dispositione, primæ videlicet, & secundæ; secundæ, & tertiæ; & sic deinceps vsque ad vltimam, si disposita sunt in aliqua multitudine; vel in infinitum, si disposita concipiuntur infinita.*

## Theor. 4. Propos. 4.

*Factis duabus dispositionibus, prima quidem omnium numerorum ab vnitate, secunda verò omnium numerorum, quos assumptus aliquis numerus metitur ab assumpto; Vnitates denominatæ planis in prima, ad vnitates denominatas planis in secunda, singulæ ad singulas eiusdem ordinis, ita se habent, vt assumpti numeri quadratus ad vnitatem.*

A. 1. 2. E.3. 4. 5. 6. 7. 8.
B. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{42}$ $\frac{1}{56}$
C. 3. 6. F.9. 12. 15. 18. 21. 24.
D. $\frac{1}{18}$ $\frac{1}{54}$ $\frac{1}{108}$ $\frac{1}{180}$ $\frac{1}{270}$ $\frac{1}{378}$ $\frac{1}{504}$

Sit

SIt omnium numerorum ab vnitate diſpoſitio A, & aſſumptus numerus E, cuius quadratus F; & ſit omnium numerorum, quos E, metitur ab E, diſpoſitio C; Sint etiam B, vnitates denominatæ planis in A; & D, vnitates denominatæ planis in C. Dico, quòd ſingulæ B, ad ſingulas D, eiuſdem ordinis, ita ſe habent, vt F, ad vnitatem. Quia numerus E, & vnitas æquè metiuntur numeros in C, & A, eiuſdem ordinis, vt ſinguli in C, ad E, ita ſinguli eiuſdem ordinis in A, ad vnitatem, & ſunt E, & vnitas homologæ ordinis eiuſdem numeris in A, & C; conuertendoque, & ex æquo binæ C, inter ſe ſunt vt binæ A, inter ſe, ſi ſumantur homologæ ordinis eiuſdem: ergo plani denominatores in ſingulis D, ad planos denominatores in ſingulis eiuſedm ordinis B, ſunt ſimiles, & duplicatam habent proportionem homologorum laterum videlicet numeri E, ad vnitatem, vel eamdem quã numerus F, ad vnitatem; ſed vt denominatores D, ad B, inter ſe, ita reciprocè ſunt vnitates denominatæ B, ad D, inter ſe: Ergo ſingulæ B, ad ſingulas eiuſdem ordinis D, ſunt vt F, ad vnitatem. Quod, &c.

## Theor. 5. Propoſ. 5.

***Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima.***

SIt A, ſeries omnium numerorum ab vnitate, & B, ſint vnitates denominatæ planis in A. Dico, quòd binæ B, à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima. Sit C, ſeries omnium numerorum à binario, quos binarius metitur,

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | 1. | | 2. | | 3. | | 4. | | 5. | | 6. | | 7. | | 8. |
| B. | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{12}$ | | $\frac{1}{20}$ | | $\frac{1}{30}$ | | $\frac{1}{42}$ | | $\frac{1}{56}$ | |
| C. | | | 2. | | | | 4. | | | | 6. | | | | 8. |
| D. | | | | | $\frac{1}{8}$ | | | | $\frac{1}{24}$ | | | | $\frac{1}{48}$ | | |

Prop. 4. titur; & D, ſint vnitates denominatæ planis in C; ergo ſingulæ B, à prima ad ſingulas D, à prima ſunt vt 4. binarij quadratus ad vnitatem: & quoniam in A, ſunt omnes numeri ab vnitate, ſunt inter numeros A, à binario, qui eſt ſecundo loco, omnes C, à primo, interpoſitis tamen ſingulis Arithmeticè medijs, quos binarius non metitur; ergo ſinguli plani denominatores vnitatum D, à (Prop. 1.) prima medij ſunt Harmonicè inter binos denominatores B, à ſecunda; ergo ſingulæ D, à prima mediæ ſunt (Prop. 3.) Arithmeticè inter binas B, à ſecunda; & propterea ſingulæ D, à prima ad binas B, à ſecunda ſunt dimidiæ, videlicet, vt vnitas ad 2: Ergo ex æquo ſingulæ B, à prima ad binas B, à ſecunda ſunt vt 4. ad 2; & conuertendo binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularũ à prima. Quod, &c.

## Theor. 6. Propoſ. 6.

*Differentia laterum plano denominata eſt diſſimilis differentia vnitatum ſingulis lateribus denominatarum.*

SInt latera A, B, quorum differentia C, denominetur plano D, vt fiat fractio E; & denominata vnitate per B, & A, fiant fractiones F, & G; & ſit C, exceſſus A, B. Dico quòd E, eſt defectus F, G. Quia F, eſt vnitas de-

no-

A. 5.   C. 2.   B. 3.

D. 15.

F. $\frac{1}{5}$   E. $\frac{2}{15}$   G. $\frac{1}{3}$

nominata per A, ex multiplicatione F A, producitur vnitas; & ex multiplicatione vnitatis, & B, ptoducitur B; ergo ex mutua multiplicatione F A B, producitut B; est autem D, planum A B; ergo ex multiplicatione F D, producitur B. Similiter demonstrabimus, quod ex mlutiplicatione G D, producitur A. Cum igitur ex multiplicationibus G, & F, in D, producantur A, & B; ergo ex multiplicatione excessus G, F, in D, producitur excessus A, B, videlicet C; Sed quia E, fractio est ex denominatione C, per D; ergo etiam ex multiplicatione E, in D, producitur C; ergo E, est æqualis excessui G, F: ergo E, est defectus F, G. Quod, &c.

## DEFINITIO IX.

*Coutinuam magnitudinum dispositionem, vôco, cum differentiæ antecedentium, & consequentium sunt similes.*

## Theor. 7. Prop. 7.

*Differentiæ denominatæ planis in continua dispositione simul sumptæ sunt æquales vni differentiæ denominatæ plano extremorum.*

A. 2. B. 4. C. 5. D. 9.
E. $\frac{2}{8}$ F. $\frac{1}{20}$ G $\frac{4}{45}$
H. $\frac{7}{18}$
I. $\frac{1}{2}$ K. $\frac{1}{4}$ L. $\frac{1}{5}$ M. $\frac{1}{9}$

SInt A, B, C, D, aliquot magnitudines continuæ dispositionis in qua differentiæ planis denominatę sint fractiones E, F, G, Differentia verò denominata plano extremorum A, D, sit fractio H. Dico, quòd E, F, G, simul sumptæ sunt æquales H. Denominentur singulæ vnitates lateribus A, B, C, D, vt fiant fractiones I, K, L, M. Quoniam E, est differentia denominata plano A B, & I, K, sunt vnitates denominatæ lateribus A, B; æqualis est E, differentiæ I, K, quæ dissimilis est differentiæ A, B. Similiter demonstrabimus F, G, H, æquales esse differentijs K, L, L, M, I, M, quę sunt dissimiles differentijs B, C, C, D, A, D; vnde quia differentiæ in
Def. 6. dispositione A, B, C, D, sunt similes, etiam differentię in dispositione I, K, L, M, sunt similes; & propterea simul sumptæ sunt æquales differentiæ I, M, vel fractioni H: Atqui colligendo differentiæ in dispositione I, K, L, M, sunt ęquales fractionibus E, F, G, simul sumptis. Ergo fractiones E, F, G, simul sumptę sunt ęquales H. Quod, &c.

Def. 5.

# Theor. 8. Propos. 8.

*Vnitates denominatæ planis in Arithmeticæ dispositione sunt ad vnitatem plano extremorum denominatam vt numerus multitudinis ipsarum ad vnitatem.*

Sint

A. 2. B. 5. C. 8. D. 11. N. 3. O. 9.
E. $\frac{1}{10}$ F. $\frac{1}{40}$ G. $\frac{1}{88}$ H $\frac{1}{22}$
I. $\frac{3}{10}$ K $\frac{3}{40}$ L $\frac{3}{88}$ M. $\frac{9}{22}$

SInt A,B,C,D, in Arithmetica diſpoſitione, cuius planis denominatę ſingulę vnitates ſint fractiones E,F, G, & vnitas denominata plano extremorum A D, ſit H. Dico quòd E, F, G, ad H, ſunt vt numerus multitudinis E,F,G, ad vnitatem. Sit N, differentia ſemper eadem in diſpoſitione, quę planis denominetur, vt fiant fractiones I,K,L,& ſit O, differentia extremorum A,D, quę plano denominetur, vt fiat fractio M. Igitur facti ſunt I,K,L, ęquales M. Et quia E, F, G, & I, K, L, eoſdem habent denominatores, numerator verò communis ipſarum E, F, G, eſt vnitas,& factorum I, K, L, eſt N; ergo tùm ſingulæ, tùm collectæ E,F,G, ad I, K, L, vel ad M, ſunt vt vnitas ad N. Pariter quia M, H, eundem habent denominatorem, nnmerator verò M, eſt O, & ipſius H, eſt vnitas; ergo M, ad H, eſt, vt O, ad vnitatem; & ex ęquo in perturbata collectæ E, F, G, ad H, ſunt, vt O, ad N: Cum autem A,B,C,D, ſint Arithmeticè diſpoſiti, eſt O, differentia extremorum ad N, differentiam conſequentium ita multiplex, vt numerus multitudinis E, F, G, ad vnitatem. Ergo E, F, G, ad H, ſunt, vt numerus multitudinis F, F, G, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 7.

## Theor. 9. Propoſ. 9.

*Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate ternæ à tertia ſunt pars tertia ſingularum à prima.*

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | 1. | | 2. | | 3. | | 4. | | 5. | | 6. | | 7. | | 8. | | 9. |
| B. | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{12}$ | | $\frac{1}{20}$ | | $\frac{1}{30}$ | | $\frac{1}{42}$ | | $\frac{1}{56}$ | | $\frac{1}{72}$ | |
| C. | | | | | 3. | | | | | | 6. | | | | | | 9. |
| D, | | | | | | | | $\frac{1}{18}$ | | | | | | $\frac{1}{54}$ | | | |

ORdinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A. Dico ternas B, à tertia, tertiam esse partem singularum à prima. Ordinentur omnes numeri C, à ternario, quos idem metitur, & D, vnitates denominatæ planis C: Et quoniam A, sunt omnes numeri, etiam inter numeros A, à ternario, qui est tertio loco, sunt omnes C, à prmo, binis medijs Arithmeticè semper interpositis, quos ternarius non metitur. Ergo ternæ vnitates B, à tertia (denominatæ planis quatuor dispositorum Arithmeticè à numeris C, qui sunt inter numeros A,) ad singulas vnitates D, (denominatas planis numerorum C, qui eorumdem quatuor semper sunt extremi) à prima sunt, vt idem ternarius, numerus videlicet magnitudinum, quæ ternæ sumuntur ad vnitatem; Singulæ autem D, à prima ad singulas B, à prima sunt, ut unitas ad 9, quadratum ternarij: Ergo ex æquo ternæ B, à tertia sunt ad singulas B, à prima, ut 3. ad 9. nempe pars tertia. Quod, &c.

Prop. 8.

Prop. 4.

## Theor. 10. Propos. 10.

*Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate, quaternæ à quarta sunt pars quarta singularum à prima.*

Prop. 5. NAm quia binæ à secunda sunt dimidiæ singularum à prima, binę à quarta sunt ad singulas à secunda,

vt

vt vnitas ad 2. & colligendo quaternæ à quarta ſunt ad binas à ſecunda, vt vnitas ad 2. & binę à ſecunda ſunt ad ſingulas à prima, vt vnitas ad 2. vel, vt 2. ad 3. Ergo ex æquo quaternæ à quarta ad ſingulas à prima ſunt vt vnitas ad 4. videlicet pars quarta. Quod, &c.

Eadem huius, & præcedentis demonſtrationum methodo poſſunt ſinguli ſequentis Theorematis caſus demonſtrari, videlicet, Vnitates denominatas planis omnium numerorum ab vnitate quinas à quinta partem eſſe quintam ſingularum à prima, ſenas à ſexta partem ſextam, ſeptenas à ſeptima partem ſeptimam, & ſic deinceps; ex quorum inductione poſtea patefiat ipſius veritas concluſionis: ne tamen ſcrupuloſum Geometram dubitare contingat, generali ſuperinde factæ propoſitioni vnica ſatisfaciam demonſtratione, vt infra.

## Theor. 11. Propoſ. 11.

*Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate ſumptæ totidem ab vna ipſarum ſecundum numerum ordinis eiuſdem, ſunt pars ab eodem numero denominata ſingularum à prima.*

ORdinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A, quarum F, aſſumpta, & inter numeros A, ſit eiuſdem F, numerus ordinis E. Dico B, ſumptas ab F, ſemper totidem ſecundum numerum E, partem eſſe denominatam ab E, ſingularum B, à prima. Ordinentur ab E, omnes numeri C, quos E, metitur,

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | 1. | 2. | E. 3. | K. 4. | L. 5. | H. 6. | M. 7. | N. 8. | I. 9. |
| B. | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | F. $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{72}$ | |
| C | | | 3. | | | 6. | | | 9. |
| D. | | | | $\frac{1}{18}$ | | | | $\frac{1}{54}$ | |

tur, & D, vnitates denominatæ planis numerorum C. Quoniam A, ſunt numeri ab vnitate, ſunt etiam inter numeros A, ab E, qui eſt in eiuſdem ordinis loco, omnes numeri C, à primo, qui ſint E, H, I, interpoſitis totidem ſemper medijs Arithmeticè, ſecundum numerum vnitate minorem E. Sint numeros E,H, interpoſiti K, L, & numeros H, I, totidem interpoſiti M, N, ſecundum numerum vnitate minorem E; Coaſſumptis ergò hinc inde ſemper duobus eorum, quos E, metitur, fiunt ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ numerorum E, K, L, H, & H, M, N, I, totidem ſemper, ſecundum numerum vnitate maiorem E, quarũ planis denominatæ vnitates ſunt ipſæ B,ſumptæ totidem ab F, ſecundũ numerũ E, quæ ad ſingulas vnitates D,à prima denominatas planis extremorũ
Prop.8. earũdem diſpoſitionum, qui ſunt numeri C, ita ſe habẽt, vt E, numreus multitudinis totidem ſumptarum ab F, ad
Prop.4. vnitatem; Singulæ autem D, à prima, ad ſingulas B, à prima ſunt, vt vnitas ad quadratum E: ergo ex æquo ſumptæ B, ab F, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad ſingulas B, à prima ſunt, vt E, ad ſuum quadratum; Sed E, cum ſuum quadratum metiatur per ſe ipſum, ſui quadrati pars eſt a ſe ipſo denominata. Ergo ſumptæ B, ab F, ſemper totidem ſecundum numerum E, ſunt pars ab eodem E, denominata, ſingularum B, à prima. Quod, &c.

Theor-

# Theor. 12. Propos. 12.

***Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate, sumptæ à prima totidem semper secundum numeros proportionis continuè subduplæ ab vnitate sunt in proportione continuè dupla.***

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ | |

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$

VNitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate prima sit A, duarum sequentium aggregatum B, quatuor sequentium aggregatum C, & deinceps totidem huiusmodi vnitatum secundum numeros proportionis continuè subduplæ sumantur aggregata. Dico A, B, C, esse in proportione continuè dupla. Prop. 5. Quia binæ à secunda sunt dimidiæ singularum à prima, B, subduplum est ipsius A, & eadem ratione, quia quaternæ à quarta sunt dimidiæ binarum a secunda, C, subduplum est ipsius B, & eadem semper demonstratione, quodlibet aggregatum subduplum est præcedentis. Ergo conuertendo A, B, C, sunt in proportione continuè dupla. Quod, &c.



Theor.

# Theor. 13. Prop. 13.

*Vnitatum, quæ denominantur planis omniū numerorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt æquales numero ipsarum multitudinis denominato per numerum vnitate maiorem.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | D. 8. | E. 9. | |
| B. | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{72}$ | |

SInt A, numeri ab vnitate, & B, quotlibet vnitates à prima earum, quæ denominantur planis numerorum A. Dico B, aggregatas æquales esse numero multitudinis ipsarum B, denominato per numerum vnitate maiorem. Sint D, E, numeri quorum plano denominatur vltima ipsarum B. Et quoniam sunt dispositi ab vnitate omnes numeri A, quorum consequentium defectus sunt singulæ vnitates, quæ planis eorumdem denominatæ sunt B; Igitur B, aggregatæ sunt æquales defectui extremorum vnitatis, & E, per eorumdem planum denominato. Est autem D, defectus vnitatis, & E, & eorumdem planus idem E: Ergo B, sunt ęquales D, denominato per E. Sed cum numeri A, sint omnes ab vnitate, numerus E, est multitudinis numerorum A, vsque ad E, & D, vnitate minor, quam E, numerus multitudinis ipsarum B. Ergo vnitates B, aggregatæ sunt ęquales numemero ipsarum multitudinis denominato per numerum vnitate maiorem. Quod, &c.

Prop. 7.

Co-

## Corollarium.

*Vnde constat, quod vnitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum, quotlibet assumptæ à prima sunt minores vnitate.*

## Problema primum. Propos. 14.

*Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ sit numeri ad numerum vnitate maiorem.*

| | | |
|---|---|---|
| A.47. | B.53. | C.6. |
| E.8 | F.9. | D.48. |

SIt proportio data minoris inęqualitatis A, ad B. Oportet alteram inuenire maiorem proportione A, ad B, quæ sit numeri ad numerum vnitate maiorem. Sit C, excessus B, A, & D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: constat D, non esse æqualem A; alias C, metiretur etiam A, & metitur se ipsum; ergo metiretur compositum ex C, A, videlicet B, & non esset D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: constat etiam D, non esse minorem A; quia sequeretur idem, vel maius absurdum; ergo D, maior est A; & D, ad C, maiorem habet proportionem A, ad C. Sit E, numerus, per quem C, metitur D, & E, auctus vnitate fiat F; ergo D,

ad C, eſt, vt E, ad vnitatem; ergo E, ad vnitatem maiorem habet proportionem A, ad C; & componendo E, ad F, maiorem habet proportionem A, ad B; & eſt numerus F, vnitate maior, quàm E. Quod facere oporebat.

## Axioma Primum.

*Quando infinitæ magnitudines infinitæ ſunt extenſicnis, poſsunt in aliqua multitudine ſumi, vt ſuperent quamlibet propoſitam extenſionem.*

## Theor. 14. Propoſ. 15.

*Quando in ordine magnitudinum in infinitum diſpoſitarum, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt minores vna eadem propoſitæ magnitudine generis eiuſdem, omnes à prima in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt extenſionis finitæ.*

A —— —— —— D —— —— ——

SInt in extenſione A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ magnitudines, quarum quotlibet aſſumptæ à pri-

prima sint minores D, generis eiusdem. Dico extensionem A, esse finitam: alias erit infinita, & sumptæ in aliqua multitudine magnitudines dispositæ in A, à prima superabunt quamlibet propositam extensionem D, contra hipothesim: non est igitur A, extensionis infinitæ, sed finitæ. Quod, &c. Ax. 1.

## Corollarium.

*Colligitur ex his quòd vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate in infinitum disposita, & aggregata sunt extensionis finitæ.* Corol. Prop. 13.

## DEFINITIO X.

*Magnitudines dicuntur implere propositam extensionem, quando existentes infinitæ sunt extensionis minoris proposita; vel quando existentes finitæ, ita sunt minores proposita, vt vna alia magnitudine adiecta in earumdem ordine continuato proxima, fiant extensionis maioris proposita.*

## Axioma Secundum.

*Quando infinitæ magnitudines finitæ sunt extensionis, & singulæ magnitudines eadem*

*in infinitum concipiuntur in vna, & altera extensione disponi, & aggregari, congruit vna extensio alteri.*

## Theor. 15. Propos. 16.

*Quando magnitudines à prima dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt extensionis finitæ, sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem maiorem quidem prima, minorem tamen extensione omnium.*

A ——— B ——— C ———

SIt A, extensio finita magnitudinum, quę à prima dispositæ in infinitum, & in ea sunt aggregatæ, & sit proposita extensio B, maior quidem prima dispositarum in A, minor tamen ipsa extensione A, & ex magnitudinibus in A, dispositis assumptæ à prima, & eodem ordine dispositæ in C, impleant B. Dico, quod assumptæ in in C, sunt in aliqua multitudine: alias assumptæ in C, quæ implent B, sunt infinitæ; igitur in extensione B, sunt dispositæ eodem ordine in infinitum, & aggregatæ magnitudines, quæ pariter in extensione A; & sunt ambo A, B, extensiones finitæ; congruit ergo B, extensioni A, minor maiori; quod est absurdum. Ergo assumptæ in C, quæ implent B, non sunt infinitæ, sed in aliqua multitudine. Quod, &c.

Ax. 2.

Theor.

# Theor. 16. Propos. 17.

*Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt æquales vnitati.*

A ——— B ——— C ———
D ——————— E ———————

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem esse vnitati: alias erit A, maior, vel minor vnitate. Sit maior, igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima vnitates in A, dispositæ implent vnitatem. Sit huiusmodi multitudininis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C: ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sumptę in multitudine numeri C, sunt maiores vnitate, quod est absurdum. Non est igitur A, maior vnitate. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad vnitatem, inueniatur altera maior, quæ sit numeri D, ad E, vnitate maiorem; & aliquot vnitates in A, dispositæ sumantur à prima in multitudine numeri D; quæ cum sint æquales numero D, denominato per E, habebunt ad vnitatem eamdem proportionem, quam D, ad E, maiorem videlicet, quam A, ad vnitatem: Ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sunt maiores omnibus in infinitum dispositis, pars toto; quod est absurdum. Non igitur A, minor est vnitate; sed neque maior. Ergo A, æqualis est unitati. Quod, &c.

Prop. 16. Def. 10. Corol. Prop. 13. Prop. 14. Prop. 13.

Aliter;

## Aliter.

Prop. 5. QVia binæ vnitatum diſpoſitarum in A, à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima; colligendo, omnes à ſecunda ſunt dimidiæ omnium à prima; & diuidendo, omnes à ſecunda ſunt æquales primæ; eſt autem prima dimidium vnitatis; Ergo omnes à prima ſunt æquales vnitati. Quod, &c.

Prop. 13.

## Aliter eadem Methodo.

Prop. 9. QVia diſpoſitarum in A, ternæ à tertia ſunt pars tertia ſingularum à prima; colligendo, omnes à tertia ſunt pars tertia omnium à prima; & diuidendo, omnes à tertia ſunt dimidiæ duarum præcedentium; ſunt autem duæ præcedentes æquales 2. denominato per 3: igitur omnes à tertia ſunt æquales vnitati denominatæ per 3. Ergo colligendo, omnes diſpoſitæ in A, ſunt æquales 3. denominato per 3. videlicet vnitati. Quod, &c.

Prop. 13.

# Theor. 17. Prop. 18.

*Vnitatum denominatarum planis omniũ numerorum ab vnitate, qualibet aſſumpta, ſumma ſuccedentium in infinitum, & ſumma præcedentium, & aſſumptæ ſunt continuè proportionales, vt vnitas ad numerum ordinis aſſumptæ.*

Vni-

D. 5. E. 6.
C ——— A. $\frac{1}{30}$ B ———

VNitatum denominatarum planis omnium numerorum ab vnitate sit A, quælibet assumpta, cuius ordinis numerus D; Sitque B, summa succedentium in infinitum, & C, summa præcedentium, & assumptæ A. Dico A, B, C, esse continuè proportionales, vt vnitas ad D. Sit E, numerus vnitate maior D: quia D, est numerus ordinis A, est etiam numerus multitudinis aggregatarum in C; igitur C, est æqualis D, demominato per E; aggregatum vero ex C, B, est æquale vnitati; ergo C, ad aggregatum ex C, B, est vt D, denominatus per E, ad vnitatem, videlicet vt D, ad E; & diuidendo, C, ad B, est vt D, ad vnitatem; quapropter C, ad B, est. vt D, denominatus per E, ad vnitatem pariter denominatam per E; ergo B, æqualis est vnitati denominatæ per E. Quia etiam D, est numerus ordinis A; & E, inter omnes numeros ipsi D, proximus vnitate maior; constat, quod A, est vnitas denominata plano D E; sed vnitas denominata per E, ad vnitatem denominatam plano D E, est vt planum D E, ad E; vel (diuidendo per E,) vt D, ad vnitatem; ergo B, ad A, est vt D, ad vnitatem. Sunt ergo continuè proportionales C, B, A, vt D, ad vnitatem; & conuertendo, A, B, C, sunt continuè proportionales vt vnitas ad D. Quod, &c.

Prop. 13.
Prop. 17.

## Theor. 18. Prop. 19.

*Factis duabus Arithmeticis dispositionibus prima ab vnitate, alter a ab assumpto numero,*

*mero, eorum videlicet numerorum, quos aßumptus metitur per ſingulos in prima diſpoſitos; vnitates denominatæ planis omnium numerorum primæ, ad vnitates denominatas planis omnium numerorum alterius diſpoſitionis ordinis eiuſdem, ita ſe habent, vt aſſumpti numeri quadratus ad vnitatem.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1. | 3. | 5. | 7. | 9. | 11. | |
| D. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{63}$ | $\frac{1}{99}$ | |
| | | | B. 2. | | | |
| C. 2. | 6. | 10. | 14. | 18. | 22. | |
| E. | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{140}$ | $\frac{1}{252}$ | $\frac{1}{396}$ | |
| | | | F. 4. | | | |

SIt diſpoſitio Arithmetica numerorum A, ab vnitate; & B, numerus aſſumptus; à quo ſit diſpoſitio numerorum C, quos B, metitur per numeros A, eiuſdem ordinis; vnitates autem denominatæ planis numerorum A, & C, ſint D, & E; & numeri B, quadratus F. Dico D, ad E, ordinis eiuſdem eſſe, vt F, ad vnitatem. Quia B, metitur numeros C, per A, eiuſdem ordinis, vt ſunt numeri A, ad vnitatem, ita C, eiuſdem ordinis ad B; & ſunt numeri A, & C, ordinis eiuſdem homologi vnitatis, & B; & eadem ratione, vt vnitas ad numeros A, ita B, ad C, ordinis eiuſdem; ergo ex æquo numeri A, inter ſe ſunt vt C, eorumdem ordinum inter ſe; & plani eorumdem ordinum numeris A, & C, contenti ſunt ſimiles; ergo denominatores D, ad eiuſdem ordi-

nis denominatores E, sunt similes; & duplicatam proportionem habent homologorum laterum vnitatis, ad B; videlicet eamdem, quam vnitas ad F; Ergo D, ad E, ordinis eiusdem sunt reciprocè, vt F, ad unitatem. Quod, &c.

## Theor. 19. Prop. 20.

*Factis duabus Arithmeticis dispositionibus prima ab vnitate, secunda vero ab assumpto in prima, eorum, quos assumptus metitur per singulos primæ; Omnes numeri secundæ sunt in prima, totidem semper interiectis, quot vnit atum est assumptus vna dempta.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1 | 3. B. 5. | 7. | 9. | 11. | 13. | |
| D. 5. | 15. | 25. | 35. | 45. | 55. | 65. |
| | | | C. 4. | | | |
| E. 4. | 12. | 20, | 28. | 36. | 44. | 52. |

SIt dispositio Arithmetica numerorum A, ab vnitate; & inter numeros A, assumptus B; à quo fiat dispositio Arithmetica numerorum, quos idem B, metitur per singulos A. Dico numeros D, esse inter numeros A, totidem semper interpositis, quot sunt vnitates in B, vna minus. Sit C, excessus B, & vnitatis; & disponantur numeri E, qui sint excessus binorum D, & A, eiusdem ordinis. Quoniam B, metitur numeros D, per A, eius-

dem ordinis; est vnitas ad B, vt numeri A, ad D; & diuidendo, est vnitas ad C, vt numeri A, ad E; igitur E, sunt multiplices numeri C; & quia C, excessus B, & vnitatis magnitudinum, quæ sunt inter numeros A, vel æqualis est, vel multiplex excessui consequentium eorundẽ A; ergo numeri E, sunt multiplices excessui consequentium A; & sunt numeri E, excessus numerorum D, A; ergo numeri D, sunt inter numeros A. Præterea, quia numeri A, metiuntur numeros D, per B; igitur excessus consequentium A, metitur excessum consequentium D, per B; sed inter extremas mediæ Arithmeticè totidem interponuntur, quoties excessus consequentium excessum extremarum metitur vna minus; Ergo numeri D, sunt inter numeros A, totidem semper imterpositis numeris A, quot sunt vnitates in B, vna minus. Quod, &c.

## Theor. 20. Prop. 21.

*Vnitates denominatæ planis numerorũ Arithmeticè dispositorum ab vnitate, sumptæ semper totidem ab assumpta, quot vnitatum est numerus inter Arithmeticè dispositos eiusdem ordinis cum aßumpta, sunt ad singulas à prima, vt vnitas ad eumdem numerum.*

SInt numeri A, Arithmeticè dispositi ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis numerorum A, quarum

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | 1. | D. 3. | 5. | 7. | 9. | 11. |
| B. | $\frac{1}{3}$ | C. $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{63}$ | $\frac{1}{99}$ | |
| E. | 3. | 9. | 15. | 21. | 27. | 33. |
| F. | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{135}$ | $\frac{1}{315}$ | $\frac{1}{567}$ | $\frac{1}{891}$ | |

rum vna C, aſſumpta, & inter numeros A, ſit D, ordinis eiuſdem. Dico B, ſumptas à C, ſecundum numerum D, ad ſingulas eaſdem B, à prima eſſe vt vnitas ad numerum D. Diſponantur Arithmeticè numeri E, à D, quos D, metitur per numeros A, & ſint F, vnitates denominatæ planis numerorum E: conſtat, quod omnes numeri E, ſunt inter numeros A, à D, totidem ſemper interpoſitis ex reliquis numeris A, quot ſunt vnitates in D, vna dempta; ergo numerorum A, inter binos numeros conſequentes E, ſingulæ fiunt arithmeticè diſpoſitiones numerorum, quorum planis denominatæ vnitates B, ſunt à C, totidem ſemper, quot ſunt numeri intermedij vno amplius, videlicet, quot ſunt vnitates in D; & ad ſingulas F, à prima denominatas plano extremorum, qui ſunt E, ſe habent, vt numerus multitudinis earum, quæ totidem ſemper ſumuntur, videlicet numerus D, ad vnitatem: ſunt autem ſingulæ F, à prima ad ſingulas B, à prima, vt vnitas ad quadratum aſſumpti D, ergo ex æquo vnitates B, totidem ſemper ſumptæ à C, ſecundum numerum D, ad ſingulas eaſdem B, à prima ſunt, vt numerus D, ad ſui quadratum, videlicet, vt vnitas ad D. Quod, &c.

Prop. 20. Prop. 8. Prop. 19.

# Theor. 21. Prop 22.

*Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, sumptæ à prima secundum numeros proportionis continuè submultiplicis ab vnitate, ad numerum sibi proximum in Arithmetica dispositione, sunt in eadem continuè multiplici proportione.*

A. 1. B. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19.

C $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$ $\frac{1}{99}$ $\frac{1}{143}$ $\frac{1}{195}$ $\frac{1}{255}$ $\frac{1}{323}$

D. $\frac{1}{3}$ E. $\frac{1}{9}$ F. $\frac{1}{27}$ G. $\frac{1}{81}$

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi ab vnitate, quorum B, proximus vnitati; & sint C, vnitates denominatæ planis numerorum A; & segregentur C, vt prima sit D, & à secunda totidem, quot sunt vnitates in B, sint E; & aliæ toties totidem sint F; & quot sunt F, toties totidem secundum numerum B, sint G, & sic deinceps: constat C, ita segregatas esse in D, E, F, G, vt sumptæ sint secundum numeros proportionis continuè submultiplicis ab vnitate ad B. Dico D, E, F, G, esse in eadem continuè multiplici proportione numeri B, ad vnitatem.
Prop. 21. Quia B, est secundo loco Arithmeticè dispositorum, singulæ C, à prima ad totidem semper sumptas à secunda secundum numerum B, sunt vt B, ad vnitatem; ergo
Prop. 21. D, ad E, est vt B, ad vnitatem. Item singulæ in E, ad to-

totidem ſecundum numerum B, ſumptas in F, ſunt vt B, ad vnitatem; & quot ſunt ſingulæ in E, toties totidem ſecundum numerum B, ſunt in F; ergo colligendo omnes E, ad omnes F, ſunt vt B, ad vnitatem. Similiter demonſtrabitur omnes F, ad omnes G, eſſe vt B, ad vnitatem, & ſic deinceps. Ergo D, E, F, G, ſunt in continuè multiplici proportione numeri B, ad vnitatẽ. Quod, &c.

# Theor. 22. Prop. 23.

*Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aggregatæ à prima ſunt æquales numero multitudinis earumdem denominato per productum eiuſdem, & exceßus diſpoſitionis Arithmeticæ auctum ſemper vnitate.*

A. 1. 3. 5. 7. E. 9.
B. 2.
C. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$
D. 4. F. 8.
G. $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{2}{35}$ $\frac{2}{63}$

SInt numeri A, diſpoſiti Arithmeticè ab vnitate, quorum exceſſus B; Sint etiam C, vnitates denominatę planis numerorum A, aſſumptæ à prima ſecundum numerum D; & inter numeros A, poſt vnitatem numeri totidem ſumantur, & ſumptorum ſit extremus E; & ſit F, exceſſus E, & vnitatis: conſtat F, ad B, eſſe ut D, mul-

titudo numerorum A, post unitatem ad ipsam vnitatem: igitur D, multiplicando B, facit F, qui auctus vnitate fit E. Dico C, æquales esse D, denominato per E. Ex denominatione B, per plana numerorum A, vsque ad E, fiant fractiones G, totidem, quot sunt C. Quia B, est excessus consequentium A, & F, extremorum, & E, planum extremorum, videlicet vnitatis, & E; sunt G, æquales F, denominato per E: Sunt autem G, ad C, vt B, ad vnitatem; & vt B, ad vnitatem, ita est F, ad D, uel F, denominatus per E, videlicet G, ad D, pariter denominatum per E; ergo G, ad C, sunt ut G, ad D, denominatum per E; ergo C, sunt æquales D, denominato per E. Quod, &c.

Prop. 7.

## Theor. 23. Prop. 24.

*Vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate quotlibet aggregatæ à prima sunt minores vnitate denominata excessu consequentium dispositionis Arithmeticæ.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| C. $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{63}$ |
| B. 2. | D. 4. | E. 8. | F. 9. |

SInt C, quotlibet unitates denominatæ planis numerorum arithmeticè cum excessu B, dispositorum ab vnitate, sumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores esse vnitate denominata per B. Ex ductu B, in D, fiat E; & F, vnitate maior, quam E; igitur

tur D, ad F, minorem habet proportionem, quam D, ad E; & quia E, productus est ex B, in D, ut D, ad E, ita est vnitas ad B; ergo D, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad B; & propterea D, denominatus per F, est minor vnitate denominata per B: sunt autem C, æquales D, denominato per F; ergo C, sunt minores vnitate denominata per B. Quod, &c. Prop. 23.

## Corollarium Primum.

*Vnde constat primo loco vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.* Prop. 15.

## Corollarium Secundum.

*Patet etiam secundo loco, quod vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.* Prop. 16.

Probl.

# Probl. 2. Prop. 25.

***Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ sit numeri, quem datus numerus metiatur ad numerum vnitate maiorem.***

A. 39 C. 7. B. 43.
D. 10. E. 11. F. 14. G. 15.

Data sit proportio minoris inæqualitatis A, ad B, & datus numerus C, opportet alteram proportionem inuenire maiorem data, quæ sit numeri, quem C, metiatur ad numerum unitate maiorem. Data proportione minoris inæqualitatis A, ad B, maior inueniatur, quæ sit numeri D, ad numerum E, vnitate maiorem. Si contigerit C, metiri D, constat proportionem D, ad E, quæsitam esse. Quod si C, non metirur D, sumatur C, toties, donec fiat maior D, & sit factus F, cui unitate aggtegata fiat G. Dico proportionem F, ad G, esse qnæsitam; quoniam F, maior est D, habet F, ad vnitatem maiorem proportionem, quam D; & componendo F, ad G, maiorem, quam D, ad E; sed D, ad E, adhuc maiorem habet, quam A, ad B; ergo F, ad G, multò maiorem habet, quàm A, ad B: inuenta est ergo proportio F, numeri, quem C, metitur ad G, numerum vnitatę maiorem, quæ est maior proportione A, ad B. Quod faciendum erat.

Prop. 14.

Theor.

# Theor. 24. Prop. 26.

*Vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum disposita, & aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ differentia consequentium dispositionis Arithmeticæ.*

A ———————— C. $\frac{1}{2}$
B. 2. D. 14. E. 15.
H ——————— F. 7. G. $\frac{7}{15}$

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quorum differentia B; & sit C, vnitas denominata per B. Dico A, æqualem esse C: alias erit A, maior, vel minor C. Sit maior; igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima unitates dispositæ in A, implent C: sit huiusmodi multitudinis numerus D, qui adiecta unitate fiat E; ergo aliquot unitates ex dispositis in A, sumptæ à prima in multitudine numeri E, sunt maiores C, quod est absurdum: igitur non est A, maior C. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad C, inueniatur altera maior, quæ sit numeri D, quem B, metiatur ad E, numerum unitate maiorem; metiatur autem B, ipsum D, per F; igitur F, ad D, est ut unitas ad B; unitas autem ad B, est ut C, ad vnitatem; ergo F, ad D, est ut C, ad unitatem; & D, ad E, maiorem habet proportionem A, ad C; ergo ex æquo in perturbata I, ad E, maiorem habet proportionem, quàm A, ad vnitatem. Denominetur I, per E, ut fiat fractio G; ergo vt

Coroll. 2. Prop. 24.
Ax. 1.
Def. 10.
Prop. 24.
Prop. 25.

eſt I, ad E, ita G, ad unitatem; igitur G, ad vnitatem habet maiorem proportionem quàm A, ad eamdem vnitatem; ergo G, maior eſt A. Sumantur ex vnitatibus diſpoſitis in A, à prima totidem ſecundum numerum F; Prop. 23. & ſit aſſumptarum extenſio H: conſtat quòd H, eſt æqualis F, denominato per E, nempe fractioni G; ergo etiam H, maior eſt A, pars toto, quod eſt abſurdum: igitur A, non eſt minor C; ſed neque maior. Ergo A, eſt æqualis C. Quod, &c.

## Aliter.

A. 1. 3. 5. K. 7. 9. 11.
E. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$
C —— —— —— I. $\frac{1}{63}$ ——
B. 2. D. $\frac{1}{2}$ F. 3. G. 6. H. 7.

Sit A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum conſequentium differentia B; & in C, ſint diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis numerorum A; & unitas denominata per B, ſit D. Dico C, æqualem eſſe D. Sit E, aggregatum quotlibet ex diſpoſitis in C, à prima, quarum multitudo F; & ex F, in B, fiat G, qui auctus unitate ſit H: Prop. 23. conſtat E, æqualem eſſe F, denominato per H: inter diſpoſitas in C, ſit I, proximè ſuccedens aggregatis in E; & K, numerus ordinis eiuſdem inter numeros A, cuius I, Prop. 21. inter vnitates C: conſtat etiam, quod unitatum C, quæ ſuccedunt ab I, ſumptæ ſemper totidem ſecundum numerum K, ad ſingulas eaſdem à prima ſunt ut unitas ad K; ergo colligendo, omnes C, ab I, ad omnes eaſdem C, à prima ſunt ut unitas ad K; ergo conuertendo, & per conuerſionem rationis, omnes C, ad aſſumptas in E, ſunt

sunt ut K, ad excessum K, super vnitatem: & quoniam K, & I, in suis dispositionibus sunt ordinis eiusdem; est excessus K, super unitatem ad excessum consequentium B, vt multitudo aggregatarum in E, videlicet numerus F, ad unitatem; ergo excessus K, super unitatem est æqualis producto ex F, in B, videlicet numero G; & propterea, adiecta hinc inde unitate, numerus K, est ęqualis H; igitur C, ad E, est ut H, ad G; & E, ad unitatem est ut F, denominatus per H, ad unitatem, uidelicet ut F, ad H; ergo ex æquo in perturbata C, ad unitatem est ut F, ad G; sed quia B, multiplicando F, facit G, est ut F, ad G, ita unitas ad B; uel unitas denominata per B, uidelicet D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem est ut D, ad eamdem uuitatem. Æquales ergo sunt C, & D. Quod, &c.

## Theor. 25. Prop. 27.

*Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet aßumptæ ad succedentes in infinitum sunt, vt productus ex numero multitudinis ipsarum, & differentia dispositionis Arithmeticæ ad vnitatem.*

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi ab unitate quorum consequentium differentia B; & unitatum, quę denominantur planis A, sint assumptæ à prima C, totidem, quot sunt unitates in D; & succedentes in infini-

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1. | | 3. | 5. | | 7. | 9. | | 11. | |
| C. | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | | E. —— | | —— | —— |
| B. 2. | | D. 3. | | | F. 6. | | G. 7. | | |

tum intelligantur diſpoſitæ, & aggregatæ in E; & ex B, in D, producatur F. Dico C, ad E, eſſe ut F, ad unitatem. Augeatur F, unitate ut fiat G: conſtat C, æquales eſſe D, denominato per G; & C, E, ſimul æquales eſſe unitati denominatę per B; & quia ex ductu B, in D, fit F, eſt unitas ad B, ut D, ad F; & unitas denominata per B, eſt æqualis D, denominato per F; propterea C, E, ſimul ſunt æquales D, denominato per F; ergo C, ad C, E, ſimul ſunt ut D, denominatus per G, ad D, denominatum per F; uel reciprocè, ut F, ad G; & diuidendo, C, ad E, ſunt ut F, ad unitatem. Quod, &c.

Prop. 23.
Prop. 27.

## Theor. 26. Propoſ. 28.

*Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ad vltimam aſſumptarum ſunt, vt productum ex numero eiuſdem ordinis cum aſſumpta inter Arithmeticè diſpoſitos, & numero multitudinis aſſumptarum ad vnitatem.*

Sit in A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab unitate; & unitatum, quæ denominantur planis A, ſint quot-

A. 1. 3. E. 5. F. 7.
B. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ D. $\frac{1}{35}$
C. 3.

quotlibet aſſumptæ à prima B, quarum multitudo C, & ultima D, & eiuſdem ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos numerus E. Dico B, ad D, eſſe ut planum C E, ad unitatem. Inter numeros A, ſit F, proximus maior E. Et quoniam E, D, ſunt eiuſdem ordinis in ſuis diſpoſitionibus; conſtat D, æqualem eſſe unitati denominatæ plano E F: quoniam etiam C, eſt multitudo B, ſunt in ordine A, numeri ab unitate ad E, totidem, & poſt unitatem ad F, pariter totidem Arithmeticè diſpoſiti; ergo exceſſus F, ſuper unitatem toties continet differentiam conſequentium, quot ſunt unitates in C; ergo C, multiplicando differentiam conſequentium producit exceſſum F, ſuper vnitatem cui quidem exceſſui adiecta vnitate fit numerus F; vnde conſtat B, eſſe æquales C, denominato per F; ergo B, ad D, ſunt vt C, denominatus Prop. 23. per F, ad vnitatem denominatam per planum E F; & multiplicando terminos per planum E F, vt B, ad D, ita ſe habet planum C E, ad unitatem. Quod, &c.

## Theor. 27. Propoſ. 29.

*Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt differentia conſequentium ad nume-*

*rum*

*rum ordinis eiuſdem cum aſſumpta inter Arithmeticè diſpoſitos.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1. | 3. | E. 5. | 7. | 9. | 11 | |
| B. 2. | | | C. $\frac{1}{35}$ | D — | — | |
| F | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | G. 3. | | |

SIt in A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum differentia B; & vnitatum, quæ denominantur planis A, ſit aſſumpta C, quam ſuccedentes in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſint in D; & eiuſdem ordinis cum C, ſit E, inter numeros A. Dico C, ad D, eſſe ut B, ad E. Sint, quæ præcedunt D, aggregatæ in
Prop. 28. F, quarum multitudo G; conſtat C, ad F, eſſe ut unitas
Prop. 27. ad planum G E; & F, ad D, eſt ut planum B G, ad unitatem; ergo ex æquo in perturbata C, ad D, eſt ut planum B G, ad planum G E; vel ut B, ad E. Quod, &c.

## Theor. 28. Prop. 30.

*Duarum fractionum minimis numeris expreſſarum, cum denominatores numeratorum ſunt æquemultiplices ſuperparticulares, maior eſt, quæ maioribus numeris exponitur, & exceſſus eſt æqualis exceſſui numeratorum denominato per planũ denominatorum.*

Sint

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. 3. | H. 4. | B. 7. | C. 12. | D. 28. |
| F. 13. | | G. 29. | | |
| L. 91. | | K. 87. | | I. 84: |

SInt duæ fractiones, quarum numeratorum A, B, sint æquemultiplices C, D; & adiecta singulis unitate fiant denominatores F, G, æquemultiplices superparticulares numeratorum A, B, quibus propositæ fractiones in minimis numeris exprimuntur; & sit B, maior A, per excessum H; vnde fit etiã D, maior C; & addita communi unitate, G, maior F. Dico fractionem B, per G, excedere fractionem A, per F, numero H, denominato per planum F G. Ex B, ducto in C, & F, producantur I, & K; & ex A, in G, fiat L: quia D, C, sunt æquemultiplices B, A, ut B, ad A, ita D, ad C; & idem I, qui fit ex B, in C, fiet etiam ex A, in D; igitur A, multiplicando G, D, facit K, I; & multiplicando vnitatem excessum G, D, facit se ipsum A, excessum K, I: demonstrabitur eodem modo B, fieri excessum L, I: ergo excessus B, A, videlicet H, est etiam excessus L, K; sed excessus fractionum B, per G, & A, per F, est excessus L, K, denominatus plano G F; ergo excessus fractionum B, per G, & A, per F, est H, denominatus plano G F. Quod, &c.

## Theor. 29. Prop. 31.

*Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet assum-*

*aſſumptæ ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt multiplex differentiæ in diſpoſitione ſecundum multitudinem aſumptarum ad multiplicem eiuſdem differentiæ ſecundum multitudinem præcedentium à prima ſemper auctum vnitate.*

B. 3.

A. 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19.

E. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$ C. $\frac{1}{70}$ $\frac{1}{130}$ $\frac{1}{208}$ G. —

F. 2. D. 3. L. 5.

I. 6. K. 7. H. 9. M. 16.

SIt A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum differentia B; & vnitatum, quæ denominantur planis A, ſint aſſumptæ C, quarum multitudo numerus D; & ſint E, quæ præcedunt, quarum multitudo numerus F; & quæ ſequuntur ſint in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ in G; & ex B, ducto in F, D, fiant I, H; & I, auctus unitate fiat K. Dico C, ad G, eſſe ut H, ad K. Fiat ex F, D, aggregatum L, & ex H, K, aggregatum M: conſtat L, eſſe multitudinem E, & C, ſimul. Et quoniam ex B, ducto in F, D, facti ſunt I, H; etiam ex B, in L, fiet aggregatum ex I, H; quod auctum unitate eſt aggregatum ex H, K, videlicet M: ergo M, eſt productum ex L, in B, auctum unitate; & propterea
Prop. 23. C, E, ſimul sũt ęquales L, denominato per M; & E, ęqualis eſt F, denominato per K; ergo C, eſt æqualis exceſ-
Prop. 30. ſu i L, F, nempe D, numero denominato per planum M K; ergo C, ad E, C, ſimul eſt ut D, denominatus per planum M K, ad L, denominatum per M; vel (multiplicando

do terminos per planum M B,) ut planum D B, denominatum per K, ad planum B L: sunt autem E, C, simul ad G, vt planum B L, ad unitatem; ergo ex æquo C, ad G, est ut planum B D, vel H, denominatus per K, ad unitatem; sed est H, denominatus per K, ad unitatem ut H, ad K. Ergo C, ad G, est ut H, ad K. Quod, &c. Prop. 27.

## Theor. 30. Prop. 32.

***Vnitates, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate binæ à prima sunt duplæ singularum vnitatum, quæ denominantur planis omnium imparium ab vnitate.***

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | 1. | | 2. | | 3. | | 4. | | 5. | | 6. | | 7. |
| C. | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{12}$ | | $\frac{1}{20}$ | | $\frac{1}{30}$ | | $\frac{1}{42}$ | |
| B. | 1. | | | | 3. | | | | 5. | | | | 7. |
| D. | | | $\frac{1}{4}$ | | | | $\frac{1}{15}$ | | | | $\frac{1}{35}$ | | |

SInt dispositiones omnium numerorum A, & omnium imparium B, ab vnitate; & vnitatum denominatarum planis A, & B, sint C, & D. Dico binas C, duplas esse singularum D, à prima. Quoniam in A, sunt omnes impares interiectis inter binos consequentes singulis paribus, concipientur singulę dispositiones Arithmeticæ trium numerorum, quorum extremi impares, & medius par; igitur singula plana sub extremis imparibus, videlicet singula plana numerorum B, à primo sunt media harmonicè inter bina plana sub singulis impari- Prop. 1.

 bus

bus,& intermedio pari, videlicet inter bina plana numerorum A, à primo; ergo singulæ vnitates planis B, denominatæ, videlicet singulæ D, à prima sunt mediæ Arithmeticè inter binas vnitates planis A, denominatas, videlicet binas C, à prima. Ergo binæ C, sunt duplæ singularum D, à prima. Quod, &c. Prop. 3.

# Theor. 31. Prop. 33.

*Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate sumptæ semper totidem à prima secundum aliquem numerum ad vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè cum eodem numero excessu dispositorum ab vnitate singulas à prima sunt, vt idem numerus ad vnitatem.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| B | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{72}$ | $\frac{1}{90}$ | |
| | | | | | C. 3. | | | | | |
| D | 1. | | | 4. | | | 7. | | | 10. |
| E | | $\frac{1}{4}$ | | | $\frac{1}{28}$ | | | $\frac{1}{70}$ | | |

SInt dispositiones A, omnium numerorum, & B, vnitatum denominatarum planis A, quæ semper totidem sumantur à prima secundum numerũ C; sint etiam dispositiones, vna quidẽ D, Arithmetica numerorum ab vnitate cum excessu C, & altera E, vnitatum, quæ denominantur planis D. Dico quòd B, totidem semper

à pri-

à prima, quot ſunt vnitates in C, ad ſingulas E, ſunt vt C, ad vnitatem. Quoniam in D, ſunt numeri ab vnitate, quorum exceſſus C, & in A, ſunt oēs numeri; igitur oēs D, ſunt inter numeros A, ab vnitate ſemper totidem interiectis, quot ſunt vnitates C, vna dempta; & propterea in A, poſſunt concipi ab vnitate ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ totidem ſemper terminorum, quot ſunt vnitates C, vna adiecta, quorum in extremis locis ſunt numeri D; & B, ſumptæ ſemper totidem à prima, quot ſunt vnitates in C, ſunt vnitates denominatæ planis numerorum, qui in ſingulis huiuſmodi diſpoſitionibus comprehenduntur; & E, ſingulæ à prima ſunt vnitates denominatæ planis extremorum earundem diſpoſitionum. Ergo ſumptæ B, à prima ſemper totidem ſecundum numerum C, ſunt ad ſingulas E, à prima, vt C, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 8.

## Theor. 32. Prop. 34.

*Factis duabus Arithmeticis diſpoſitionibus à duobus numeris, quorum ſunt æquemultiplices differentiæ in diſpoſitionibus; vnitates denominatæ planis numerorum earumdem, cum eiuſdem ſunt ordinis, inter ſe reciprocè ſunt, vt quadrati primorum numerorum.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C. | 2. | | D. 5. | | E. 6. | | F. 15. | | G. 3. |
| A. | 2. | | 8. | | 14. | | 20. | | 26. |
| H. | | $\frac{1}{16}$ | | $\frac{1}{112}$ | | $\frac{1}{280}$ | | $\frac{1}{520}$ | |
| B. | 5. | | 20. | | 35. | | 50. | | 65. |
| I. | | $\frac{1}{100}$ | | $\frac{1}{700}$ | | $\frac{1}{1750}$ | | $\frac{2}{3250}$ | |
| K. | 1. | | 4. | | 7. | | 10. | | 13. |
| L. | | $\frac{1}{4}$ | | $\frac{1}{28}$ | | $\frac{1}{70}$ | | $\frac{1}{130}$ | |

SInt A,& B, duæ Arithmeticæ diſpoſitiones à numeris C,D,quarum differentiæ ſint E,F,æquemultiplices C, D, per numerum G; & ſint H, I, vnitates denominatæ planis numerorum A, B. Dico H, ad I, eiuſdem ordinis eſſe, vt quadratus numeri D, ad quadratum C.Fiat K, Arithmetica diſpoſitio ab vnitate, in qua differentia G, cuius numerorum planis denominatæ vnitates diſponantur, in L. Quoniam C, metitur ſe ipſum primo loco diſpoſitum in A, per vnitatem primo loco diſpoſitam in K; & metitur E, differentiam numerorum A, per G, differentiam numerorum K; ergo componendo, C, metitur omnes A, per omnes eiuſdem ordinis K; ergo L, ad H, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri C,ad vnitatem; & conuertendo, H, ad L, ita ſe habent vt vnitas ad quadratum C: eadem methodo demonſtrabimus, quod L, ad I, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri D, ad vnitatem; & ex æquo in perturbata H, ad I, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Quod,&c,

Prop. 19.

Theor.

# Theor. 33. Prop. 35.

***V**nitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum ab aliquo numero, sumptæ ab assumpta semper totidem secundum numerum ordinis eiusdem inter Arithmeticè dispositos, ad sumptas à prima semper totidem secundum primum numerum eorumdem Arithmeticè dispositorum sunt, vt idem primus numerus ad numerum ordinis eiusdem cum assumpta.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | B. 2. | | E. 5. | | | | |
| A. | 2. | 5. | 8. | 11. | 14. | 17. | 20. |
| C. | $\frac{1}{10}$ D. | $\frac{1}{40}$ | $\frac{1}{88}$ | $\frac{1}{154}$ | $\frac{1}{238}$ | $\frac{1}{340}$ | |
| F. | 3. | | | | | | |
| G. | 2. | | 8. | | 14. | | 20. |
| I. | | $\frac{1}{16}$ | | $\frac{1}{112}$ | | $\frac{1}{280}$ | |
| H. | | 5. | | | | | 20. |
| K. | | | | $\frac{1}{100}$ &c. | | | |

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi à B, & sint C, vnitates denominatæ planis numerorum A, quarum assumpta D, & eiusdem ordinis inter Arithmeticè dispositos A, sit E. Dico C, sumptas à D, semper totidem secundum numerum E, ad easdem C, sumptas à prima totidem semper secundum numerum B, esse vt B,

ad

ad E: ſit F, differentia in diſpoſitione A, & à numeris B, E, fiant Arithmeticæ diſpoſitiones G, H, quarum differentiæ plana F B, F E: & vnitates denominatæ planis numerorum G, H, ſint I, K. Quia omnes numeri G, H, ſunt inter numeros A, à B, E, ſemper totidem interiectis, quot ſunt vnitates in B, E, vna dempta; poterunt concipi in A, ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ à B, C, totidem ſemper numerorum, quot ſunt vnitates in B, E, vna amplius, in quarum extremis reperiuntur bini con-
Prop. 8. ſequentes numeri diſpoſitionum G, H: ergo vnitates denominatæ planis huiuſmodi ſingularum diſpoſitionum Arithmeticarũ ab E, cuiuſmodi ſunt C, ſumptę à D, ſemper totidem ſecundum E, ad vnitates denominatas plano extremorum earumdem, cuiuſmodi ſunt ſingulæ K, à prima ſunt vt E, ad vnitatem, vel vt quadratus numeri
Prop. 34. E, ad E; ſingulæ autem K, ad ſingulas I, à prima ſunt, vt quadratus numeri B, ad quadratum E: ergo ex æquo in perturbata C, ſumptæ à D, ſemper totidem ſecundum E, ad ſingulas I, a prima ſunt, vt quadratus B, ad E;
Prop. 8. ſingulæ autem I, vtpote vnitates denominatæ planis extremorum diſpoſitionum Arithmeticarum, quæ ſingulæ concipiuntur inter numeros A, a B, ad vnitates denominatas planis conſequentium earumdem diſpoſitionum, cuiuſmodi ſunt vnitates C, ſumptæ a prima ſemper totidem ſecundum numerum B, ſunt vt vnitas ad B, vel vt B, ad ſui quadratum: ergo ex æquo in perturbata C, ſumptæ a D, ſemper totidem ſecundum E, ad eaſdem C, ſumptas a prima ſemper totidem ſecundum B, ſunt vt B, ad E.

Quod, &c.

# Theor. 34. Propoſ. 36.

***Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ſumptæ à duabus aſſumptis totidem ſemper ſecundum numeros ordinum earumdem ſunt reciprocè, vt ijdem numeri.***

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 2. | | E. 5. | | 8. | | F. 11. | | 14. |
| B. | $\frac{1}{10}$ | | C. $\frac{1}{40}$ | | $\frac{1}{88}$ | | D. $\frac{1}{154}$ | |

SInt numeri A, diſpoſiti Arithmeticè, & B, vnitates denominatæ planis eorumdem, quarum ſint aſſumptæ C, D, & eorumdem ordinum inter numeros A, ſint E, F. Dico B, ſumptas a C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundum numerum F, eſſe vt F, ad E. Quoniam B, ſumptæ à C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à prima ſemper totidem ſecundum primum numerorum A, ſunt vt idem primus ad E; item ipſæ B, ſumptæ à prima ſemper totidem ſecundum eumdem numerum primum ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundũ numerum F, ſunt vt F, ad eumdem primum numerorum A; ergo ex æquo in perturbata B, ſumptæ à C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundum numerum F, reciprocè ſunt vt F, ad E. Quod, &c.

Prop. 35.

Prop. 35.

Theor.

# Theor. 35. Propoſ. 37.

*Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum, ſumptæ quotlibet à prima ſunt æquales numero multitudinis earumdem denominato per productum ſub eodem numero multitudinis, & primo numero, & differentia in diſpoſitione ſemper auctum quadrato eiuſdem primi numeri.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B. 2. | C. 3. | E. 4 | G. 24. | H. 28. | F. $\frac{1}{7}$ | |
| A. 2. | 5. | 8. | K. 11. | | L. 14. | 17. |
| D. | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{40}$ | $\frac{1}{88}$ | I. $\frac{1}{154}$ | | $\frac{1}{238}$. |

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti à B, cum differentia C; & ſint D, unitates denominatæ planis numerorum A, quarum ſumptę quotlibet à prima ſecundum multitudinem E, ſint aggregatæ in F; & ex E, in planũ B C, ducto ſit productus G, qui auctus quadrato B, ſit H. Dico quod F, eſt æqualis E, denominato per H. Sit I, vltima ſumptarum in F; & K, inter numeros
Prop. 8. A, eiuſdem ordinis, cui proximus maior L: conſtat F, ad vnitatem denominatam plano B L, ſe habere vt E, ad vnitatem; ergo F, eſt æqualis E, denominato per planum B L: quoniam, quot ſunt vnitates in E, tot ſunt aggregatæ in F; totidemque ſunt plana numerorum A, vſque ad L; necnon totidem ſunt exceſſus æquales ipſi C, inter extremos L, B: ergo exceſſus L, B, ad C, eſt vt E,

ad

ad vnitatem; & propterea excessus L, B, est ęqualis plano C E; & L, est compositus ex plano C E, & numero B; & (multiplicando per B, ) planus B L, est compositus ex producto B, in planum C E, & ex quadrato B; huiusmodi autem est etiam numerus H; ergo planus B L, est æqualis H: ergo F, est æqualis E, denominato per H. Quod, &c.

## Theor. 36. Propos. 38.

*Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum, quotlibet aggregatæ à prima sunt minores vnitate denominata plano primi numeri, & differentiæ dispositionis Arithmeticæ.*

A. 5. C. 2. D. 3. E. 6. F. 30. G. 34.

B $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ $\frac{1}{238}$

SInt in B, sumptæ à prima secundum numerum A, quotlibet vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum à C, cum differentia D; & fiat E, planum C D. Dico B, minorem esse vnitate denominata per E. Ex A, in E, ducto fiat F, qui auctus quadrato C, sit G: quia G, maior est F, habet A, ad G, proportionem minorem, quam ad F; sed, cum F, sit productus ex A, in E, vt A, ad F, ita est vnitas ad E; ergo A, ad G, minorem habet proportionem, quam vnitas ad E; & A, denominatus per G; minor est vnitate denominata per E; est autem B, æqualis A, denominato per G; Prop. 37.
ergo B, minor est vnitate denominata per E. Quod &c.

## Corollarium Primum.

Prop. 15. *Vnde constat vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè dispositorum in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.*

## Corollarium Secundum.

Prop. 16. *Constat etiam, quod vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.*

## Probl. 3. Prop. 39.

*Data proportione minoris inæqualitatis alteram inuenire maiorem data, quæ sit inter numeros, quorum minor sit multiplex dati, & maior minorem excedat altero dato.*

Sit

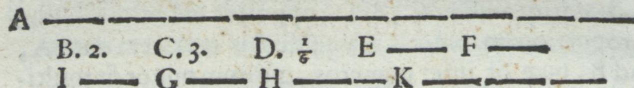
A. 23. C. 3. E. 6. G. 42.
B. 29. D. 7. F. 7. H. 49.

SIt data proportio minoris inæqualitatis A, ad B; datiq; numeri C, & D; opportet inuenire alteram proportionem minoris inæqualitatis maiorem data A, ad B, quæ sit inter numeros, quorum minor sit multiplex C, & maior minorem excedat per D. Inueniatur proportio maior data A, ad B, quæ sit numeri E, quem datus C, metiatur ad numerum F, vnitate maiorem; & D, multiplicando E, F, faciat G, H. Dico proportionem G, ad H, esse quæsitam. Est enim vt E, ad F, ita G, ad H, proportio minoris inæqualitatis maior data A, ad B; & quia C, metitur E; & E, metitur G; ergo C, metitur G; & conuertendo, G, est multiplex C: quia E, ad F, est vt G, ad H; diuidendo, E, ad vnitatem est vt G, ad excessum H, G; & permutando, E, ad G, est, vt vnitas ad excessum H, G; sed (cum D, multiplicando E, fecerit G,) vt E, ad G, ita est vnitas ad D; ergo vnitas ad excessum H, G, est vt vnitas ad D; igitur D, est excessus H, G: inuenta est ergo proportio minoris inæqualitatis G, ad H, maior data A, ad B, in qua minor numerus G, est multiplex dati C, & maior H, excedit G, per alterum datum D. Quod facere, &c. Prop. 1.

## Theor. 37. Prop. 40.

*Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum disposita in infinitũ, et aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ ꝑ produ-*

*ctum numeri primi in Arithmetica dispositione, & differentiæ consequentium.*




SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorũ à B, cum differentia C; & sit D, vnitas denominata plano B C. Dico A, esse æqualem D. Alias erit A, maior, vel minor D: sit maior; igitur in aliqua multitudi- (Coroll. 2. prop. 38.) ne sumptę à prima vnitates dispositæ in A, implent D: sit huiusmodi multitudinis numerus E, qui adiecta vnitate fiat F; ergo aliquot vnitates A, sumptæ in multi- (Def. 10.) tudine F, sunt minores D, quod est absurdum; igitur (Prop. 38.) non est A, maior D. Sit minor, & data proportione mi- (Prop. 39.) noris inæqualitatis A, ad D, inueniatur altera minoris inæqualitatis maior data, quæ sit numeri G, multiplicis plani B C, ad numerum H, excedentem ipsum G, quadrato numeri B; sit autem G, multiplex plani B C, secundum I; & vnitatum denominatarum in A, sumantur a prima totidem secundum numerum I; & sumptarum sit aggregatum K; constat K, æqualem esse I, denomi- (Prop. 37.) nato per H; & quoniam I, multiplicando planum B C, facit G; ergo vt vnitas ad planum B C, ita se habet I, ad G; sed vnitas ad planum B C, est vt D, ad vnitatẽ; ergo vt I, ad G, ita est D, ad vnitatem; & G, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad D; ergo ex æquo in perturbata I, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad vnitatem; sed vt I, ad H, ita est K, ad vnitatem; ergo K, ad vnitatem habet maiorem pro-

por-

portionem quam A, ad eamdem vnitatem, maior ergo est K, quàm A, pars, quàm totum, quod est absurdum: non est ergo A, maior D, neque minor. Ergo A, æqualis est ipsi D. Quod, &c.

## Idem Aliter.

B. 2.　　　　C. 3.
A. 2.　5.　F. 8.　11.　14.　17.
D.　$\frac{1}{10}$　$\frac{1}{40}$　E $\frac{1}{88}$　$\frac{1}{154}$　$\frac{1}{238}$

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi à B, cum differentia C; & D, vnitates denominatæ planis A, in infinitum dispositæ, & aggregatæ. Dico D, æquales esse vnitati denominatæ plano B C. Sumantur D, à prima tot, quot sunt vnitates in B, & assumptas proximè sequatur E, cuius ordinis inter numeros A, sit F; & ab E, sumantur D, totidem semper secundum numerum B, sicut à prima; & iterum ab eadem E, sumantur totidem semper secundum numerum F: quia D, sumptę ab E, secundum F, semper totidem ad easdem D, sumptas à prima secundum B, semper totidem sunt vt B, ad F; ergo colligendo, omnes D, ab E, ad omnes D, sunt vt B, ad F; & per conuersionem rationis primæ sumptæ D, à prima secundum numerum B, ad omnes D, à prima sunt vt excessus F, B, ad F; est autem excessus F, B, toties multiplex excessus C, quot sunt primæ sumptæ D, videlicet secundũ numerum B; quare excessus F, B, est æqualis plano B C; & F, est compositus ex plano B C, & B; sumptæ vero primæ D, secundum numerum B, sunt æquales B, denominato per productum ex B, & plano B C, auctum quadrato B; videlicet diuidendo per B, vnitati denominatæ per planum B C, auctum B,
vel

Prop. 35.
Prop. 37.

uel unitati denominatæ per F; ergo unitas denominata per F, ad D, eſt ut planum B C, ad F; uel ut unitas denominata per F, ad unitatem denominatam plano B C: ergo ſunt æquales D, & unitas denominata plano B C. Quod, &c.

## Theor. 38. Prop. 41.

*Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum quotlibet aſſumptæ a prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, ut planum ſub numero aſſumptarum, & differentia diſpoſitionis Arithmeticæ ad primum eiuſdem diſpoſitionis numerum.*

B. 2. C. 3. D. 4.
A. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ ———————
E. $\frac{1}{7}$ F ———————

SInt A, unitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum à B, cum differentia C; quarum aſſumptæ à prima quotlibet ſecundum numerum D, ſint compoſitæ in E; & reliquæ in infinitum diſpoſitæ ſint in F. Dico E, ad F, eſſe ut planum C D, ad B. Sunt enim E,
Prop. 8. æquales D, denominato per productum ex D, & plano
Prop. 29. B C, auctum quadrato B; & A, æquales unitati denominatæ plano B C; ergo E, ad A, ſunt ut D, denominatus per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam plano B C; & diuiden-

uidendo per D, ut unitas denominata per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam per productum ex D, & plano B C; uidelicet ut productum ex D, & plano B C, ad seipsum auctum quadrato B; & diuidendo per B, ut productum ex D, in C, ad se ipsum auctum numero B; & diuidendo, E, ad F, sunt ut planum D C, ad B. Quod, &c.

## Theor. 39. Prop. 42.

*Vnitatum denominatarum planis Arithmeticè dispositorum quotlibet assumptæ à prima ad vltimam assumptarum sunt, vt planum numeri multitudinis aßumptarum, & numeri ordinis eiusdem cum aspta inter Arithmeticè dispositos ad eorumdem primum.*

C. 2. 5. 8. 11. F. 14. G. 17. D. 3.
B $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ E. $\frac{1}{238}$ A. 5.

Sint secundum numerum A, totidem in B, dispositæ unitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum a C, cum differentia D, quarum assumptarum ultima E; & eiusdem ordinis inter Arithmeticè dispositos sit F, quem sequatur G. Dico B, ad E, se habere ut planum A F, ad C. Quoniam B, sunt æquales A, denominato per productum ex A, & plano C D, auctum quadrato C; & E, est unitas denominata plano Prop. 37. Prop. 37.

no F G; productum autem ex A, & plano C D, auctum quadrato C, eſt planum C G; ergo B, ad E, ſunt ut A, denominatus plano C G, ad unitatem denominatam plano F G; & multiplicando per G, ut, A denominatus per C, ad uninatem denominatam per F; & diuidendo per A, ut unitas denominata per C, ad unitatem denominatam per planum A F; uidelicet ut planum A F, ad C. Quod, &c.

## Theor. 40. Propoſ. 43.

*Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum, qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt differentia ad numerum ordinis aßumptæ inter Arithmeticè diſpoſitos.*

A. 2. 5. 8. 11. D. 14. B. 3.
F. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ C. $\frac{1}{238}$ E —— G. 5.

VNitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab A, cum differentia B, ſit aſſumpta C, cuius ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos numerus D; & ſuccedentes ipſi C, ſint diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ in E; quæ uerò præcedunt unà cum eadem aſſumpta ſint compoſitæ in F, quarum multitudo G. Di-
Prop. 42. co C, ad E, ſe habere uti B, ad D. Quoniam C, ad F,
Prop. 41. eſt ut A, ad planum G D; & F, ad E, ſunt ut planum G B, ad A; ergo ex æquo in perturbata C, ad E, eſt ut planũ G B, ad planũ G D; & diuidẽdo per G, ut B, ad D. Quod, &c.

Theor.

# Theor. 41. Prop. 44.

***Duarum fractionum, cum denominatores eodem numero excedunt æquemultiplices numeratorum, maior eſt, quæ maioribus numeris exprimitur, & exceſſus eſt fractio, in qua productum eiuſdem numeri & differentiæ numeratorum denominatur plano denominatorum.***

I. 5. L. 3. K. 2.
A —— B ——
C. 34. E. 4. D. 16.
G. 30. H. 12.

SInt duæ fractiones A, B, quarum denominatores C, D, ſuperant eodem numero E, numeros G, H, æquemultiplices numeratorum I, K; & I, excedat K, per L; ergo G, excedit H; & adiecto E, communi, etiam C, excedit D. Dico A, maiorem eſſe B. Quia G, H, ſunt æquemultiplices I, K; ergo I, ad G, eſt vt K, ad H; & quia G, maior eſt H, maiorem habet proportionem G, ad E, quàm H, ad E; & componendo, G, ad C, quàm H, ad D; & ex æquo I, ad C, quam K, ad D; ergo fractio A, maior eſt B. Dico præterea exceſſum eſſe planum L E, denominatum plano C D. Quoniam I, ad K, eſt vt G, ad H; planum I H, plano K G, eſt æquale: & quoniam E, eſt exceſſus D H; planum I E, eſt exceſ-

H ſus

ſus planorum I D, I H, vel I D, K G: & eadem ratione planum K E, eſt exceſſus planorum K C, H G; ergo idem eſt exceſſus tùm planorum I D, K C, tum etiam planorum I E, K E; cum autem L, ſit exceſſus I, K; ergo L E, eſt exceſſus planorum I E, KE; videlicet exceſſus planorum I D, K C; ſed exceſſus A, B, eſt æqualis exceſſui planorum I D, K C, denominato per planum D C; ergo exceſſus A, B, eſt planum L E, denominatum plano D C, Quod, &c.

## Theor. 42. Prop. 45.

*Vnitatum, quæ denominantur planis diſpoſitorum Arithmeticè, quotlibet aſumptæ ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt multiplex differentiæ in Arithmetica diſpoſitione ſecundum multitudinem aſumptarum ad multiplicem eiuſdem differentiæ ſecundum multitudinem præcedentium auctum primo eiuſdem diſpoſitionis numero.*

B. 4. C. 5. Q. 70.

G. 2. D. 3. M. 5. N. 116.

F $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{126}$ A $\frac{1}{266}$ $\frac{1}{456}$ $\frac{1}{696}$ E —— ——

I. 10. K. 15. L. 14.

SInt A, aſſumptæ vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum à B, cum differentia

tia C; & multitudo A, ſit D; & ſint E, infinitæ ſucce-
dentes ipſis A; & F, præcedentes, quarum multitudo
G; & ex ductu C, in G, D, fiant I, K; & I, auctus B,
ſit L. Dico A, ad E, ſe habere vt K, ad L. Fiat M, ag-
gregatum numerorum G, D; & N, productum B C M,
auctum quadrato B. Conſtat F, A, ſimul æquales eſſe Prop. 37.
M, denominato per N: ducatur etiam B, in L, & fiat
Q: quia L, eſt compoſitus ex B, I; videlicet ex B, & pla-
no G C; etiam Q, compoſitus eſt ex producto BCG, &
ex quadrato B: conſtat pariter F, æquales eſſe G, deno- Prop. 37.
minato per Q; & A, exceſſui dictarum fractionum, vide- Prop. 44.
licet producto ſub D, & quadrato B, denominato per
planum QN; ergo A, ad F, A, ſimul ſunt vt productum
ex D, & quadrato B, denominatum per QN, ad M,
denominatum per N; & multiplicando per N C, vt pro-
ductũ ex plano D C, & quadrato B, denominatum per
Q, ad planum M C; ſunt autem F, A, ſimul ad E, vt M Prop. 41.
C, ad B; ergo ex æquo A, ad E, ſunt vt productum ex
plano DC, & quadrato B, denominatum per Q, ad B;
& diuidendo per B, vt productum DCB, denominatũ
per Q, ad vnitatem; videlicet vt productũ DCB,
ad Q; eſt autem K, æqualis plano DC; & Q,
æqualis plano BL; ergo A, ad E, ſunt
vt productum KB, ad produ-
ctum BL; & diuidendo
per B, vt K, ad L.
Quod, &c.



*Finis Libri Primi.*

# NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ, SEV De Additione Fractionum

## *LIBER SECVNDVS,*

In quo de Fractionibus agitur, quas denominant numeri ſolidi. Demonſtrantur Additiones in propoſitionibus 4. 5 13. 20. Quadraturæ verò in 8. 15. 23. 27.

### Theorema 1. Propoſitio 1.

*Si quatuor magnitudines binæ ſe æqualiter exceſſerint, planum ſub maioribus excedit planum ſub minoribus plano ſub eodem exceſſu, & aggregato maximæ, & minimæ.*

SIt E, exceſſus A, B, æqualis exceſſui C, D. Dico exceſſum planorum A C, B D, æqualem eſſe plano ſub E, & aggregato A, D. Quoniam E, eſt exceſſus C, D;

E. 3. A. 5. B. 2. C. 7. D. 4.

C, D; planum E A, eſt exceſſus planorum C A, D A: & quoniam E, eſt exceſſus A, B; planum E D, eſt exceſſus planorum DA, DB; ergo colligendo plana EA, ED, ſimul ſunt ęqualia exceſſibus planorum CA, DA, DA, DB; videlicet vni exceſſui planorum C A, B D; plana verò E A, E D, ſunt æqualia plano ſub E, & aggregato A, D; ergo exceſſus planorum C A, B D, eſt æqualis plano ſub E, & aggregato A, D. Quod, &c.

## Theor. 2. Prop. 2.

*Numerorum Arithmeticè diſpoſitorum aggregatum eſt æquale dimidio plani ſub multitudine, & aggregato extremorum.*

A. 2. 5. 8. 11. 14. B. 17. C. 4. D. 2.

SInt numeri Arithmeticè diſpoſiti, quorum primus A, vltimus B, & multitudo C. Dico aggregatos æquales eſſe dimidio plani ſub C, & aggregato A, B. Sit primo C, par cuius dimidium D; quoniam numeri A, B, & intermedij totidem ſunt, quot vnitates in C; ergo bini totidem ſunt, quot vnitates in D; bini autem tùm extremi A, B, tùm ab extremis æqualiter diſtantes inter ſe ſunt æquales; ergo omnes aggregati ſunt ad aggregatum extremorum A B, vt D, ad vnitatem; & omnes aggregati ſunt æquales plano ſub D, & aggregato extremorum; videlicet dimidio plani ſub C, & aggregato A, B.

Sed

A. 2. 5. 8. 11. B. 14. C. 5. D. 4. E. 8.

Sed esto C, impar, & vnitate dempta fiat D, par: quia excessus extremorum est multiplex excessus consequentium per D; ergo excessus extremorum A, B, est par; & duplum A, est par; ergo aggregatum extremorum A, B, est par; cuius dimidium sit E: igitur E, medius est inter Arithmeticè dispositos ab A, ad B; & ad E, bini tùm extremi A, B, aggregati, tùm æqualiter distantes ab extremis dupli sunt; ergo omnes aggregati præter E, ad E, sunt vt D, ad vnitatem; & componendo omnes ad E, sunt vt C, ad vnitatem; ergo omnes aggregati sunt æquales plano sub E, & C; dimidio videlicet plani sub aggregato A, B, & C. Quod, &c.

## Theor. 3. Prop. 3.

*Dispositis Arithmeticè quotcunque numeris, differentia planorum sub primis, & vltimis ad aggregatum omnium præter primum, & vltimum sunt, vt duplum excessus ad vnitatem.*

A. 2. B. 5. 8. 11. 14. 17. C. 20. D. 23.
E. 3. F. 18. G. 6. H. 3.

NVmerorum Arithmeticè dispositorum duo primi sint A, B, duo vltimi C, D, & consequentium excessus E. Dico differentiam planorum DC, AB, esse ad

ad omnium aggregatum præter A, D, vt duplus E, ad vnitatem. Quoniã ſunt æquales exceſſus D, C, B, A, viciſſim etiã ſunt æquales exceſſus D, B, C, A; ſit F, exceſſus D, B, vel C, A; ergo exceſſus planorum D C, AB, eſt planum ſub I, & aggregato A, D, vel B, C: ſit G, multitudo omnium præter A, D, cuius dimidium H; ergo aggregatum omnium præter A, D, eſt planum ſub H, & aggregato B, C; & eſt planum ſub F, & aggregato B, C, ad planum ſub H, & aggregato B, C, vt F, ad H: & quoniam F, toties continet E, quot G, vnitates; ergo F, ad G, eſt vt E, ad vnitatem; eſt autem G, ad H, duplus; videlicet vt duplus E, ad E; ergo ex æquo in perturbata F, ad H, eſt vt duplus E, ad vnitatem; ergo exceſſus planorum D C, A B, ad aggregatum omnium præter A, D, eſt vt duplus E, ad vnitatem. Quod, &c.

Prop. 1. 2.

Prop. 2. 2.

## Theor. 4. Propoſ. 4.

*Diſpoſitis Arithmeticè quotcunque numeris, vnitates denominatæ ſolidis eorumdẽ conſequentium ſunt æquales aggregato ex intermedijs diſpoſitis denominato per planoplanum ex binis extremis.*

Sint vnitates quotcunque A, denominatæ ſolidis conſequentium Arithmeticè quomodolibet diſpoſitorũ. Dico A, æquales eſſe aggregato eorumdem diſpoſitorum præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Sint B, totidem exceſſus alternorum in eadem diſpoſitione ijſdem ſolidis denominati: & quia con-

| | 3. | 5. | 7. | 9. | 11. | 13. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | | $\frac{1}{105}$ | $\frac{1}{315}$ | $\frac{1}{693}$ | $\frac{1}{1287}$ | |
| B. | | $\frac{4}{105}$ | $\frac{4}{315}$ | $\frac{4}{693}$ | $\frac{4}{1287}$ | |

conſequentium Arithmeticè diſpoſitorum exceſſus ſunt æquales ; etiàm alternorum exceſſus æquales inter ſe ſunt ; & ſinguli dupli ſunt ad exceſſum conſequentium ; ergo ſingulæ B, ad ſingulas A, ſunt vt duplum exceſſus conſequentium ad vnitatem ; & colligendo omnes B, ad omnes A, ſunt vt duplum exceſſus conſequentium ad
Prop.3,2. vnitatem ; videlicet, vt exceſſus planorum ſub binis extremis ad aggregatum omnium diſpoſitorum præter extremos ; & diuidendo per planoplanum ex binis extremis, vt exceſſus planorum ſub binis extremis eorumdẽ planoplano denominatus ad aggregatum omnium præter extremos pariter denominatum : ſunt autèm omnes B, æquales exceſſui planorum ſub binis extremis eorumdem planoplano denominato; ergo omnes A, ſunt æquales aggregato omnium præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Quod, &c.

# Theor. 5. Propoſ. 5.

*Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ conſequentium ab vnitate, quotlibet à prima ſunt æquales producto numeri multitudinis ipſarum in numerum ternario maiorem, denominato per quadruplum eiuſdem producti, addito ſemper 8.*

Sint

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A. 1. | 2. | E. 3. | D. 4. | C. 5. | F. 6. |
| B. | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{60}$ | | |
| | G. 18. | I. 80. | K. $\frac{18}{80}$ | L. 9. | M. 40. |

SInt A, numeri conſequentes ab vnitate; & B, vnitates denominatæ ſolidis conſequentium A; & numerus multitudinis B, ſit E; qui ternario auctus fiat F; & productum ex E, in F, ſit G; cuius quadruplum auctum numero 8. ſit I; & ex denominatione G, per I, fiat fractio K. Dico, quòd aggregatum omnium B, eſt æquale K. Numerorum A, ſint D, C, duo, qui ſequuntur E: quoniam numeri A, terni denominant ſingulas B; ergo multitudo numerorum A, qui denominant B, binario ſuperat multitudinem B; videlicet numerum E; eſt autem C, qui binario excedit E; ergo C, eſt multitudo numerorum A, qui denominant B; & ſunt in A, omnes numeri ab vnitate; ergo diſpoſitorum in A, vſque ad C, ſunt vltimi C, D; primi vnitas, & 2; & extremi vnitas, & C: ſit M, planoplanum ſub D, C, 2. & vnitate; & L, ſit aggregatum reliquorum, præter vnitatem, & C; ergo B, ſunt æquales L, denominato per M: & quia C, binario, & F, ternario excedunt E; ergo F, excedit C, vnitate; & F, æqualis eſt C, & vnitati; vel D, & binario; ergo planũ E F, videlicet numerus G, duplus eſt L: item exceſſus plani D C, ſuper binarium (planum videlicet vnitatis, & binarij) duplus eſt eiuſdem L; ergo G, eſt exceſſus plani DC, ſuper binariũ; & planũ DC, excedit G, per binariũ; & quadruplũ DC, excedit quadruplũ G, per 8: eſt autẽ I, qui excedit quadruplum G, per 8: ergo I, eſt quadruplum plani D C, vel duplum planoplani ſub D, C, 2. & vnitate: ergo I, eſt duplum M; & G, ad L, eſt vt I, ad M. & permutando, G, ad I, eſt vt L, ad M; ergo L, denominatus per M, videlicet aggregatum omnium B, eſt æquale G, denominato per I, videlicet fractioni K. Quod, &c.

Prop. 4. 2.

Prop. 2. 2.

Prop. 3. 2.

# Theor. 6. Propos. 6.

*Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium consequentium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt minores quarta parte vnitatis.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | D. 4. | 5. | 6. B. 7. | | A. 28. |
| C. | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{120}$ | | E. 112. | F. 120. |

SInt C, quotlibet vnitates denominatę solidis omnium cōsequentium ab vnitate sumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores esse quarta parte vnitatis. Fiat B, ternario maior D; & planum B D, sit A; cuius quadruplus E; qui auctus numero 8. sit F: ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & est A, ad E, vt vnitas ad 4. ergo A, ad F, minorem habet, quàm vnitas ad 4. & A, denominatus per F, est mi-
Prop. 5. 2. nor quarta parte vnitatis; sunt autē C, aggregatæ æquales A, denominato per F; ergo C, aggregatæ sunt minores quarta parte vnitatis. Quod, &c.

## Corollarium Primum.

Pr. 15. 2. *Vnde constat vnitates, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab vnitate di-*

*sposi-*

*ſpoſitas in infinitum, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis.*

## Corollarium Secundum.

*Patet etiam, quod vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum.* Pr. 16. 1.

## Probl. 1. Prop. 7.

*Datis duobus numeris alium inuenire, qui non minorem vno dato metiatur per ſe ipſum auctum altero dato.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A. 53. | M. 3. | E. 15. | F. 12. | G. 6. | |
| B. 212. | C. 221. | D. ℞. 221. | H. 6. | K. 9. | L. 54. |

SInt dati A, M: opportet numerum inuenire, qui non minorem dato A, metiatur per ſeipſum auctum dato M. Fiat B, dati A, quadruplus; & C, ſumma ex quadrato M, & B; & numeri C, ſumatur latus, vel radix

A. 53. M. 3. E. 15. F. 12. G. 6.
B. 212. C. 221. D. ℞. 221. H. 6. K. 9. L. 54.

quadrata D; & ſit numerus E, non minor D; à quo ſubtrahatur M; & reſidui F, dimidium ſit G; & H, ſit numerus non minor G. Dico H, metiri numerum non minorem A, per ſeipſum auctum numero M; fiat K, aggregatum ex H, & M; & ex ductu H, in K, fiat L; ergo L, eſt compoſitus ex quadrato H, & plano M H: & quoniam H, non eſt minor G; & eſt duplus G, æqualis F; & F, auctus M, eſt E; & E, non eſt minor D; ergo duplus H, auctus M, non eſt minor D; & quadratum dupli H, aucti M, non eſt minus C; eſt autem quadratum dupli H, aucti M, equale quadrato M, quadruplo quadrato H, & quadruplo plano MH; & ſunt quadruplum quadratum H, & quadruplus planus M H, æquales quadruplo L; ergo quadratum dupli H, aucti M, eſt æquale quadrato M, & quadruplo L; ergo quadratum M, & quadruplus L, non ſunt minores C; & ablato communi quadrato M, quadruplus L, non eſt minor B; & diuidendo per 4. numerus L, non eſt minor A. Inuenimus ergo numerum H, qui metitur L, numerum non minorē A, per ſe ipſum auctum numero M. Quod, &c.

## Theor. 7. Prop. 8.

*Vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales quartæ parti vnitatis.*

Sint

A ———————— B —— C ——
I ———— D — E —— F ———— G — H —

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem eſſe $\frac{1}{4}$. Alias erit A, maior, vel minor $\frac{1}{4}$. ſit maior; igitur in aliqua multitudine ſumptæ à prima vnitates in A, diſpoſitæ implent $\frac{1}{4}$. ſit huiuſmodi multitudinis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C; ergo aliquot vnitates in A, diſpoſitæ ſumptæ à prima in multitudine numeri C, ſunt maiores $\frac{1}{4}$. quod eſt abſurdũ: Non eſt igitur A, maior $\frac{1}{4}$. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{4}$, inueniatur altera maior, quę ſit numeri I, quem numerus 4. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipſius D, ſit octuplus F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per ſe ipſum auctum ternario; & ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudine numeri G; & aſſumptarũ ſumma ſit H: conſtat H, eſſe portionem ipſius A; & æqualem producto ex numero G, in ſe ipſum ternario auctum denominato per quadruplum eiuſdem producti addito 8. quia autem productum ex G, in ſe ipſum ternario auctũ non eſt minus F; etiam denominatum per quadruplum eiuſdem producti addito 8. non eſt minus F, denominato per quadruplum F, addito 8; & (diuidendo vtrumque numerum fractionis per 8.) non eſt minus D, denominato per quadruplũ D, auctũ vnitate; ergo H, non eſt minor, D, denominato per quadruplum D, auctum vnitate; eſt autem I, quadruplus D; & I, auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denominato per E: ſed quia D, ad I, eſt vt vnitas ad 4; vel $\frac{1}{4}$ ad vnitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{4}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus per E, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quam A; maior

Cor. 2. Prop. 9. 2.
Prop. 9. 2.
Pr. 25. 1.
Prop. 7. 2.
Prop. 5. 2.
Pr. 44. 1.

igitur

igitur eſt D, denominatus per E, quam A; & non eſt H, minor D, denominato per E; ergo H, eſt maior A, pars, toto; quod eſt abſurdum: non igitur A, minor eſt $\frac{1}{4}$; neque maior; ergo A, eſt æqualis $\frac{1}{4}$. Quod, &c.

# Theor. 8. Propoſ. 9.

***Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum conſequentium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productum ex numero multitudinis ipſarum in ſe ipſum ternario auctum ad binarium.***

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ E ————————
B. 2. C. 5. D. 10. F. 48.

VNitatum denominatarum ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate ſint A, aſſumptæ à prima in multitudine B; & reſiduæ in infinitum ſint diſpoſitæ, & aggregatæ in E; & B, ternario auctus ſit C; & ex B, in C, fiat D. Dico A, ad E, eſſe vt D, ad bina-
Prop.5.2. rium. Fiat F, quadruplum D, auctum 8: conſtat A,
Prop.8.2. æqualem eſſe D, denominato per F; & aggregatas A, E, æquales eſſe vnitati denominatæ per 4. ſed quia, vt vnitas ad 4. ita ſe habet D, binario auctus ad F; vnitas denominata per 4; videlicet aggregatæ A, E, ſunt æquales D, binario aucto denominato per F; ergo A, ad aggregatas A, E, eſt vt D, denominatus per F, ad D, binario

rio

rio auctum denominatum per F; & ( multiplicando per F, ) vt D, ad D, binario auctum; ergo diuidendo, A, ad E, est vt D, ad binarium. Quod, &c.

## Theor. 9. Prop. 10.

***Vnitatum, quæ denominantur solidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima ad vltimã assumptarum sunt, vt aggregatum ex cubo numeri multitudinis ipsarum, & triplo quadrati eiusdem ad quaternarium.***

B. 4. E. 5. F. 6. D. 7.

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ C $\frac{1}{120}$

SInt vnitatum, quæ denominantur solidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet assumptæ A, secundum numerum B; & vltima assumptarum sit C. Dico A, ad C, esse vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Sit D, numerus ternario maior B; & sint E, F, qui proximè succedunt ipsi B, in ordine omnium numerorum ab vnitate: constat F, E, dispositos esse Arithmeticè, vt binarius, & vnitas; & permutando, F, & binarium esse Arithmeticè, vt E, & vnitas; & communem excessum esse B; ergo planum F E, excedit planum sub binario, & vnitate, plano sub B, & aggregato ex F, & vnitate; videlicet plano B D; ergo planum B D, auctum binario est æquale plano F E: & quia B, est multitudo Prop. 1. 2.

ipsa-

B. 4. E. 5. F. 6. D. 7.

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ C $\frac{1}{120}$

Prop. 5. 2. ipſarum, A; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum B D, auctum 8; ſed quadruplum BD, auctum 8 eſt quadruplum plani B D, aucti 2; videlicet plani E F; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum E F: quia etiam B, eſt numerus multitudinis A, quarum vltima C; conſtat B, eſſe numerum ordinis C; & binario, ac vnitate minorem eſſe numeris, qui ſolidum producunt denominatorem C; ergo C, eſt vnitas denominata ſolido ſub B, & plano E F; ergo A, ad C, eſt vt planum B D, denominatum quadruplo plani E F, ad vnitatem denominatam ſolido ſub B, & plano E F; & multiplicando per planum E F, vt planum B D, denominatum per 4. ad vnitatem denominatam per B; & iterum multiplicando per B, vt ſolidum ſub quadrato B, & D; videlicet aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, denominatum per 4. ad vnitatem; & multiplicando per 4, vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Quod, &c.

## Theor. 10. Prop. 11.

*Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt binarius ad numerum ordinis aſſumptæ.*

Sint

B. 3 D $\frac{9}{40}$ A $\frac{1}{60}$ C ———————

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate ſit aſſumpta A; cuius ordinis numerus B; & ſuccedentes in infinitum C. Dico A, ad C, eſſe vt binarius ad B. Sit D, aggregatum earum, quæ præcedunt C, à prima; quarum erit A, vltima; & numerus multitudinis ipſarum D, idem, qui ordinis aſſumptæ, videlicet B: ergo A, ad D, eſt vt 4. Pr. 10. 2.
ad compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B; ſunt Pr. 9, 2.
autem D, ad C, vt planum ſub B, & ipſo B, ternario aucto; videlicet vt compoſitum ex quadrato B, & triplo B, ad binarium; & multiplicando per B, vt compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad duplum B; ergo ex æquo A, ad C, eſt vt 4. ad duplum B; & diuidendo per 2, vt 2. ad B. Quod, &c.

# Theor. II. Prop. 12.

*Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ non à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex numero multitudinis ipſarum in numerũ ternario maiorem auctus duplo plani ſub eodem numero, & multitudine præcedentium, ad productum ex numero multitudinis præceden-*

*tium in numerum ternario maiorem auctum binario.*

A. 2. B. 3. M. 5. P. 8. E. 40. F. 168.

G $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ H $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{120}$ $\frac{1}{210}$ I ——— ——— ——— ———

K. 30. L. 12. O. 5. C. 10. D. 48.

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſint aſſumptæ H, non à prima in multitudine numeri B; quibus in infinitum ſuccedentes I; & præcedentes G, in multitudine numeri A; & productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA, ſit K; ſit etiam O, ternario maior A, & planus AO, ſit C, qui auctus binario fiat L. Dico H, ad I, eſſe vt K, ad L. Fiat M, aggregatum ex A, B; & P, ternario maior M; & planus PM, ſit E; cuius quadruplus auctus numero 8. ſit F: ergo M, eſt multitudo ipſarum
Prop. 5. 2. G, H; & ſunt G, H, æquales E, denominato per F: fiat etiam D, quadruplus L: quoniam L, excedit C, per binarium; etiam D, excedit quadruplum C, per 8; ergo G,
Prop. 5. 2. sũt ęquales C, denominato per D; ergo exceſſus G, & H, ſupra G, videlicet H, ſunt æquales exceſſui numeri E, denominati per F, ſupra numerum C, denominatum per D: & quia D, F, excedunt per 8. quadruplos C, E; ergo
Pr. 44. 1. exceſſus fractionũ E, per F, & C, per D, eſt octuplus exceſſus E, C, denominatus per planum DF: quoniam etiam 3. eſt idem exceſſus tùm P, M, tum O, A; viciſſim exceſſus P, O, eſt æqualis exceſſui M, A; videlicet nume-
Prop. 1. 2. ro B; ergo exceſſus planorum PM, OA, videlicet exceſſus E, C, eſt æqualis plano ſub B, & aggregato A, P; eſt autem P, æqualis M, & 3; & M, æqualis A, & B; ergo aggregatum A, P, eſt aggregatum ex B, 3, & duplo A; & planum ſub B, & aggregato A, P, eſt aggregatum ex qua-

quadrato B, triplo B, & duplo plani A B; videlicet productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA; cuiusmodi est numerus K; ergo K, est excessus E, C; & H, sunt æquales octuplo K, denominato per planum DF; ergo H, ad H, G, sunt vt octuplus K, denominatus plano D F, ad E, denominatum per F; & multiplicando per F, vt octuplus K, denominatus per D, ad E; sunt autem G, H, ad I, vt E, ad 2: ergo ex æquo H, ad I, sunt vt octuplus K, denominatus per D, ad 2; & diuidendo per 2. vt quadruplus K, denominatus per D, ad vnitatem; vel vt quadruplus K, ad D; ergo (quia D, est quadruplus L, diuidendo etiam per 4) H, ad I, sunt vt K, ad L. Quod, &c. Prop. 9. 2.

# Theor. 12. Prop. 13.

*Vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt æquales producto numeri multitudinis ipsarum in numerum binario maiorem, denominato per duodecuplum eiusdem, addito semper 9.*

Sint A, impares ab vnitate; quorum solidis denominatæ sint vnitates B; quarum multitudo à prima sit numerus C; & C, auctus binario fiat D; & planus CD, sit E; cuius duodecuplus auctus 9 sit G; & ex denominatione E, per G, fiat fractio H. Dico B, esse æquales H. Sint I, K, vltimi, qui adhibentur in denominatione

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. 1. | 3. | 5. | I. 7. | K. 9. |
| B | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{105}$ | $\frac{1}{315}$ | |
| C. 3. | D. 5. | E. 15. | G. 189. | H. $\frac{15}{189}$ |

Prop. 4. 2. B, ergo B, ſunt æquales aggregato ex omnibus diſpoſitis in A, vſque ad K, præter vnitatem, & K, denominato per planoplanum ſub K, I, 3, & vnitate: & quia terni A, denominant ſingulas B; multitudo diſpoſitorum in A, vſque ad K, binario maior eſt multitudine B, videlicet numero C; ergo numerus C, eſt multitudo omnium A, vſq; ad K, præter duos extremos vnitatem, & K; & Prop. 2. 2. aggregatum eorumdem, præter extremos, eſt dimidium plani ſub C, & aggregato extremarum vnitatis, & K; & quoniam inter vnitatem, & K, tot ſunt intermedij, quot vnitates in C; ergo exceſſus extremorum vnitatis, & K, ad 2. exceſſum conſequentium eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; & componendo, exceſſus vnitatis, & K, auctus binario, vel aggregatum ex K, & vnitate ad 2. eſt vt C, auctus 2, videlicet D, ad vnitatem; permutandoq; & conuertendo, D, dimidius eſt aggregati ex K, & vnitate; & planum CD, vel numerus E, dimidius eſt Prop. 2. 2. plani ſub C, & aggregato ex K, & vnitate; ergo E, eſt aggregatum omnium A, vſq; ad K, præter extremos vnitatem, & K: eadem ratione, quia exceſſus vnitatis, & K, ad 2. eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; diuidendo, exceſſus I, & vnitatis ad 2. eſt vt C, ad vnitatem; permutandoque, & conuertendo, C, dimidius eſt exceſſus I, & vnitatis; & duplus C, auctus vnitate eſt I; & auctus ternario eſt K; & compoſitus ex 3. & quadruplo quadrati C, & octuplo eiuſdem C, videlicet compoſitus ex 3. & quadruplo E, eſt planus I K, & (multiplicando per 3. planum vnitatis & 3.) compoſitus ex 9, & duodecuplo E, videlicet numerus G, eſt planoplanum ſub Prop. 5. 2. K; I, 3, & vnitate: ergo B, ſunt æquales E, denominato per G, videlicet fractioni H. Quod, &c.

Theor.

# Theor. 13. Prop. 14.

*Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt minores duodecima parte vnitatis.*

C. $\frac{1}{15}$. $\frac{1}{105}$. $\frac{1}{315}$. $\frac{1}{693}$.
D. 4. B. 6. A. 24. E. 288. F. 297.

SInt C, quotlibet vnitates denominatę ſolidis omnium imparium ab vnitate ſumptæ in multitudine numeri D, à prima. Dico C, aggregatas minores eſſe $\frac{1}{12}$. Fiat B, binario maior D; & planum B D, ſit A; cuius duodecuplus E; qui auctus numero 9. ſit F. Ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & eſt A, ad E, vt vnitas ad 12. ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad 12. & A, denominatus per F, eſt minor $\frac{1}{12}$. Sunt autem C, aggregatæ æquales A, denominato per F; ergo C, aggregatæ sũt minores $\frac{1}{12}$. Quod, &c. Pr. 13. 2.

## Corollarium Primum.

*Vnde conſtat vnitates denominatas ſolidis omnium imparium ab vnitate in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis.* Pr. 15. 1.

Co-

# Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quòd vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum.*

# Theor. 14. Prop. 15.

*Vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales* $\frac{1}{12}$.

A ——————————————————

B — C — D — E — F — G — H — I ——

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ unitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab unitate. Dico A, æqualem eſſe $\frac{1}{12}$. Alias erit A, maior, uel
Cor. 2. pr. 14. 2. minor $\frac{1}{12}$. Sit maior igitur in aliqua multitudine ſumptę à prima unitates in A, diſpoſitæ implent $\frac{1}{12}$: ſit huiuſmodi multitudinis numerus B, qui unitate adiecta fiat C;
Def. 10. ergo aliquot unitates in A, diſpoſitæ ſumptæ à prima in
Pr. 14. 2. multitudine numeri C, ſunt maiores $\frac{1}{12}$: quod eſt abſurdum:

dum: non eſt igitur A, maior $\frac{1}{12}$. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{12}$, inueniatur altera maior, quæ ſit numeri I, quem numerus 12. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipſius D, ſit nonuplus F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per ſe ipſum auctum binario, & ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudine numeri G; & aſſumptarum ſumma ſit H: conſtat H, eſſe portionem ipſius A; & æqualem producto ex numero G, in ſe ipſum binario auctum denominato per duodecuplum eiuſdem producti addito 9: quia autem productus ex G, in ſe ipſum binario auctum non eſt minor F; etiam denominatus per duodecuplum eiuſdem producti addito 9. nō eſt minor F, denominato per duodecuplum F, addito 9; & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per 9.) non eſt minor D, denominato per duodecuplum D, auctum vnitate; eſt autem I, duodecuplus D; & I, auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denominato per E: ſed quia D, ad I, eſt vt unitas ad 12. uel $\frac{1}{12}$ ad unitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{12}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, uel D, denominatus per E, ad unitatē habet maiorem proportionē, quàm A; maior igitur eſt D, denominatus per E, quàm A; & non eſt H, minor D, denominato per E; ergo H, eſt maior A, pars toto; quod eſt abſurdum: Non igitur A, minor eſt $\frac{1}{12}$, neque maior; ergo A, eſt æqualis $\frac{1}{12}$. Quod, &c.

Pr. 25. 1.

Prop. 7. 2.

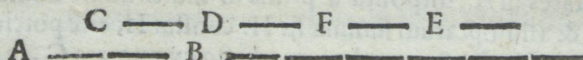
Pr. 13. 2.

Pr. 44. 1.

## Theor. 15. Prop. 16.

*Vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima*

*ma ad succedentes in infinitum sunt, vt quadruplum plani sub numero multitudinis assumptarum, & numero binario maiore ad ternarium.*




VNitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab vnitate sint quotlibet assumptę A, in multitudine numeri C, & succedentes in infinitum B, Planus etiam sub C, & numero binario maiore sit D, cuius quadruplus F, & duodecuplus E. Dico A, ad B, esse vt F, ad 3. Et quia C, est multitudo magnitudinum A; & D, est planus sub C, & numero binario maiore; & E, duo-
Pr. 18. 2. decuplus D; ergo A, sunt æquales D, denominato per E,
pr. 18. 2. auctum nouenario; & aggregatæ A, B, sunt æquales vnitati denominatæ per 12. Ergo A, ad aggregatas A, B, sunt vt D, denominatus per E, auctum 9. ad $\frac{1}{12}$. & (multiplicando per 12.) vt E, denominatus per se ipsum auctum 9. ad vnitatem, videlicet vt E, ad E, auctum 9. & diuidendo per 3, vt F, ad F, auctum 3; ergo diuidendo, A, ad B, sunt vt F, ad 3. Quod, &c.

## Theor. 16. Propos. 17.

*Vnitatum, quæ denominantur solidis imparium ab vnitate, quotlibet assumptæ ad vltimam sunt, vt productum ex quadruplo*

qua-

*quadrati multitudinis aßumptarum vnitate minuto in idem quadratum auctum duplo lateris, ad ſexcuplum eiuſdem lateris auctum ternario.*

C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{195}$ B. $\frac{1}{693}$ H. 297. K. 81. F. 189.

SInt in multitudine numeri E, aſſumptæ A, vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab unitate; quarum ultima B; & ſit G, quadratum ipſius E, auctum duplo lateris eiuſdem; & M, quadruplum eiuſdem quadrati unitate minutum; & L, ſexcuplum eiuſdem E, auctum 3. Dico A, ad B, eſſe ut planum G M, ad L. Sit H, duodecuplum G, auctum nouenario: conſtat A, Pr. 13. 2. ęquales eſſe G, denominato per H: fiat C, unitate minor E; & quadratum C, auctum duplo eiuſdem ſit D; cuius duodecuplus auctus 9. ſit F; quia C, eſt unitate minor E, numero multitudinis A; conſtat C, eſſe multitudinem A, præter B; & A, præter B, æquales, eſſe Pr. 13. 2. D, denominato per F: tandem fiat K, nonuplus exceſſus G, D; conſtat etiam B, æqualem eſſe K, denominato per Pr. 44. 1. planum F H: & quoniam C, eſt æqualis E, unitate minuto; quadratum C, eſt æquale unitati, & quadrato E, dempto duplo E; & (adiecto communi duplo C, uel duplo E, binario minuto) quadratum C, una cum duplo C, uidelicet numerus D, æqualis eſt quadrato E, unitate minuto; eſt autem G æqualis eidem quadrato aucto duplo E; igitur exceſſus G, D, eſt duplus E, auctus unitate; cuius triplus eſt ſexcuplus E, auctus 3; huiuſmodi eſt numerus L; ergo L, eſt triplus exceſſus G, D; & exceſſus G, D, eſt nona pars numeri K; ergo ex æquo L, ad

C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{195}$ B. $\frac{1}{693}$ H. 297. K. 81. F. 189.

K, eſt vt 3. ad 9. & conuertendo K, triplus eſt ad L: quia diximus D, æqualem eſſe quadrato E, vnitate minuto; duodecuplus ipſius D, eſt æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 12; & (adiecto communi 9.) duodecuplus D, auctus 9. videlicet numerus F, eſt æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 3; cuius tertia pars eſt quadruplus quadrati E, minutus vnitate; huiuſmodi eſt numerus M; ergo M, tertia pars eſt ipſius F; & conuertendo F, triplus eſt ad M; videlicet, vt K, ad L; permutandoq; & conuertendo K, ad F, eſt vt L, ad M; ergo K, denominatus per F, æqualis eſt L, denominato per M: quia etiam diximus A, æquales eſſe G, denominato per H; & B, æqualem K, denominato per planum FH; ergo A, ad B, ſunt vt G, denominatus per H, ad K, denominatum per FH; & multiplicando per H, vt G, ad K, denominatum per F; videlicet vt G, ad L, denominatum per M; ergo (multiplicando per M,) A, ad B, ſunt ut planum GM, ad L. Quod, &c.

## Theor. 17. Prop. 18.

*Vnitatũ, quæ denominãtur ſolidis imparium ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedẽtes in infinitum eſt, vt octuplus numeri ordinis aſſumptæ auctus 4. ad quadruplum quadrati eiuſdem vnitate minutum.*

Vni-

A $\frac{5}{63}$ B $\frac{1}{315}$ C —— —— —— ——
G 15 E. 3 D. 35. F. 7

VNitatum, quæ denominantur solidis imparium ab vnitate sit assumpta B; cuius ordinis numerus E;& ipsi B, succedentes in infinitum C; sit etiam D, quadruplus quadrati E, vnitate minutus; & F, duplus E, auctus vnitate. Dico B, ad C, esse vt quadruplus F, ad D. Aggregentur in A, tùm B, tùm quæ ipsam B, præcedunt à prima: quia E, est numerus ordinis B; est etiã multitudinis collectarum in A: fiat G, æqualis quadrato E, aucto duplo lateris eiusdem; quoniam igitur B, ad A, sunt vt sexcuplum E, auctum 3; videlicet vt triplus F, ad planum G D; sunt autem A, ad C, vt quadruplum G, ad 3; & diuidendo per 4. vt G, ad $\frac{3}{4}$; & multiplicando per D, vt planum G D, ad triplum D, denominatum per 4; ergo ex æquo B, ad C, sunt vt triplus F, ad triplum D, denominatum per 4; & diuidendo per 3, vt F, ad D, denominatum per 4; & multiplicando per 4, B, ad C, sunt vt quadruplus F, ad D. Quod, &c.

Pr. 17. 2.

Pr. 16. 2.

## Theor. 18. Prop. 19.

*Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet assumpta non à prima, ad succedentes in infinitum sunt, vt planus numeri aßumptarum, & numeri binario maioris auctus duplo plani sub numeris aßumptarum, & præcedentium, ad planum sub numero præceden-*

***tium, & numero binario maiore auctum ſemper fractione in qua 3. denominatur per 4.***

A. 3. B. 2. L. 8. M. 12.

D $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ E. $\frac{1}{693}$ $\frac{1}{1287}$ C —— —— ——

F. 15. K. 20. H. 35. G. 189. I. 429.

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate ſint aſſumptæ E, non à prima in multitudine numeri B; quas in infinitum ſuccedentes C; & præcedentes D, in multitudine numeri A; ſit autem L, planus numeri B, & numeri binario maioris; & M, duplus plani ſub numeris A, B; & F, planus numeri A, & numeri binario maioris. Dico E, ad C, eſſe vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{3}{4}$ vnitatis. Fiat G, nouenario maior duodecuplo ipſius F; & H, productus ex aggregato A, B, in numerum binario maiorem; & I, no-
Pr. 13. 2. uenario maior duodecuplo ipſius H: conſtat D, æquales eſſe F, denominato per G; & D, E, ſimul æquales H, de-
Pr. 44. 1. nominato per I; & E, æquales nonuplo exceſſus H, F, denominato per planum G I; ſit K, exceſſus H, I; ergo E, ad aggregatas A, E, ſunt vt nonuplus K, denominatus plano G, ad H, denominatum per I; & multiplicando per I, vt nonuplus K, denominatus per G, ad H; & multiplicando per 4. vt quater nonuplus, vel ter duodecuplus K,
Pr. 16. 2. denominatus per G, ad quadruplum H; ſunt autem aggregatæ A, E, ad C, vt quadruplus H, ad 3; ergo ex æquali E, ad C, ſunt ut ter duodecuplus K, denominatus per G, ad 3; & diuidendo per 3, vt duodecuplus K, denominatus per G, ad vnitatem; & multiplicando per G, vt duodecuplus K, ad G, vel ad duodecuplum F, auctum

9; &

9; & diuidendo per 12. vt K, ad F, auctum $\frac{9}{12}$, vel $\frac{3}{4}$: & quoniam sunt quatuor magnitudines A, aggregatum ex A, B, & numeri binario maiores ipsis, eodem excessu B, se se excedentes; ergo planum sub maioribus, videlicet H, excedit planum sub minoribus, videlicet F, plano sub B, & aggregato ex maxima, & minima, videlicet ex binario, B, & duplo A; planum autem sub B, & composito ex binario, & B, est L; & planum sub B, & duplo A, est M; ergo excessus H, F, videlicet K, est æqualis aggregato L, M; ergo E, ad C, sunt vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{3}{4}$. Quod, &c. Prop. 1. 2.

## Theor. 19. Prop. 20.

*Vnitatum, quæ denominantur solidis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima, sunt æquales fractioni, cuius numerator est multiplex plani sub multitudine assũptarum, & excessu aucti excessu, & binario, per eamdẽ multitudinem; denominator verò multiplex numeratoris per duplum compositi ex quadrato, & numero excessus, auctus duplo quadrato compositi ex eodem excessu, & vnitate.*

Sint

A $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{280}$ $\frac{1}{910}$ $\frac{1}{2080}$ $\frac{1}{3952}$ $\frac{1}{6688}$ $\frac{1}{14050}$

B. 3. C. 7. D. 21. E. 24. F. 25. G. 26.

L. 4. N. 22. I. 24. H. 182. K. 4368.

SInt A, vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate cum exceſſu B, ſumptæ in multitudine numeri C; ſit autem D, planum C B; & D, auctus B, ſit E; quo ſingulis duabus vnitatibus aucto fiant F, & G: conſtat G, eſſe æqualem plano C B, aucto B, & binario: & quia C, eſt multitudo A; & terni Arithmeticè diſpoſiti denominant ſingulas A; ergo numerus binario maior C, eſt multitudo eorum, qui adhibētur in denominatione ſumptarum A; & propterea C, multitudo eſt intermediorum, præter extremos; ſed quot ſunt intermedij, totuplex eſt exceſſus penultimi, & vnitatis ad exceſſum conſequentium; ergo planum B C, videlicet numerus D, eſt exceſſus penultimi, & vnitatis; & D, auctus B, videlicet E, eſt exceſſus vltimi, & vnitatis; & E, auctus vnitate videlicet F, eſt vltimus; & G aggregatum extremorum F, & unitatis: ex ductu G, in C,
Pr. 2, 2. fiat H; conſtat etiam H, eſſe duplum aggregati intermediorum. Sit I, duplum compoſiti ex quadrato, & numero B; & ex ductu H, in I, fiat K; & compoſitum ex B, & unitate ſit L; conſtat L, eſſe ſecundum Arithmeticè diſpoſitorum ab unitate. Dico A, æquales eſſe H, denominato per compoſitum ex K, & duplo quadrati L. Fiat N, compoſitus ex D, & vnitate; conſtat N, eſſe penultimum Arithmeticè diſpoſitorum ab unitate; ergo diſpoſitionis Arithmeticæ primi ſunt vnitas, & L; ultimi uero N, & F; & extremi unitas, & F: quoniam unitas ad duplum B;
pr. 3. 2. vel H, ad duplum plani B H; vel dimidium H, ad planum B H, eſt vt aggregatum intermediorum ad exceſſum plani N F, ſuper L, planum unitatis, & L; eſt autem aggregatum

gatum intermediorum dimidium H; ergo excessus plani N L, super L, est planum B H; & planum N F, est æquale plano B H, & L; & solidum L N F, est æquale solido L B H, aucto quadrato L; quoniam autem L, est æqualis B, & unitati; planum L B, est æquale composito ex quadrato B, & numero B; videlicet dimidio I; ergo solidum L B H, est æquale dimidio plani H I; videlicet dimidio K; ergo solidum L N F, uel planoplanum unitatis, L, N, & F, est dimidium K, auctum quadrato L; ergo A sunt Pr.4.2.
æquales dimidio H, denominato per dimidium K, auctum quadrato L; & multiplicando utrumque numerum fractionis per 2. sunt æquales H, denominato per K, auctum duplo quadrato L. Quod, &c.

## Theor. 20. Prop. 21.

*Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet aßumptæ à prima sunt minores vnitate denominata duplo compositi ex quadrato, & numero exceßus.*

C —— —— —— —— —— ——
D —— E —— F —— G ——

SInt C, quotlibet unitates denominatæ solidis omniū Arithmeticè dispositorum ab unitate, sumptæ in qualibet multitudine à prima; & sit D, duplum compositi ex quadrato, & numero excessus dispositionis Arithmeticæ. Dico C, minores esse unitate denominata D. Sit

E,

E, multiplex plani multitudinis assumptarum, aucti numero excessus, & binario, per eamdem multitudinem; & F, multiplex E, per D; & G, duplum quadrati compositi
Pr. 20. 2. ex eodem excessu, & unitate; ergo C, sunt æquales E, denominato per F, auctum G; & C, ad unitatem sunt ut E, denominatus per F, auctum G, ad unitatem; uidelicet ut E, ad compositum ex F, & G; habet autem E, ad compositum ex F, & G, minorem proportionē quàm E, ad F; & E, ad F, est ut unitas ad D; uel ut unitas denominata per D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem habent minorem proportionem, quàm unitas denominata per D, ad eamdem unitatem; ergo C, sunt minores unitate denominata per D. Quod, &c.

## Corollarium Primum.

Pr. 15. 1. *Vnde constat vnitates denominatas solidis omnium numerorum Aritbmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.*

## Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quod vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarum earundem in infinitum.*

Probl.

# Probl. 2. Prop. 22.

*Datis tribus numeris, quartum inuenire, qui non minorem primo dato metiatur per planum sui ipsius, & alterius dati, auctum tertio dato.*

B.41. C.4. D.2. E.℞.168. F.℞.$2\frac{5}{8}$ G.$\frac{1}{4}$ A.3.

SInt B, C, D, tres numeri dati, opportet inuenire quartum, qui metiatur numerum non minorem dato B, per planum sui ipsius, & C, auctum D. Aggregati ex quadrato D, & quadruplo plani B C, sit radix quadrata E; quæ diuidatur per duplum C, vt fiat quotiens F: item D, diuidatur per duplum C, vt fiat quotiens G, & sit A, non minor excessu F, G. Dico A, metiri numerum non minorem B, per planum A C, auctum D. Quoniam A, non est minor excessu F, G; ergo aggregatum A G, non est minus F; & (multiplicando per duplum C,) duplum aggregati ex planis A C, G C, non est minus duplo plani F C: & quia G, est quotiens diuisionis D, per duplum C; duplum plani G C, est numerus D: item quia F, est quotiens diuisionis E, per duplum C; duplum plani F C, est E; ergo aggregatum ex duplo plani A C, & D, non est minus E; & quadratum aggregati ex duplo plani A C, & numero D, videlicet aggregatum ex quadruplo planoplani quadratorum A, C, & quadruplo solidi A C D, & quadrato D, non est minus quadrato E, videlicet aggregato ex quadrato D, & qua-

 druplo

druplo plani B C; & ( dempto prius communi quadrato D, nec non diuidendo per quadruplum C,) aggregatum ſolidi ſub C, & quadrato A, & plani A D, non eſt minus B: ſed A, metitur aggregatum ſolidi ſub C, & quadrato A, & plani AD, per planum AC, auctum D; ergo A, metitur numerum non minorem B, per planum AC, auctum D. Quod, &c.

# Theor. 21. Prop. 23.

*Vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum Arithmeticæ diſpoſitionis ab vnitate, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales vnitati denominatæ per duplum compoſiti ex quadrato, & numero exceſſus conſequentiũ eiuſdem diſpoſitionis.*

A ——————————————— L. 24. M. $\frac{1}{24}$
B — C — I — D — E — F — N. 16. O. 3. P. 5. G ——
H ——————————————

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum Arithmeticæ diſpoſitionis ab vnitate; & ſit L, duplus compoſiti ex quadrato, & numero exceſſus conſequentium eiuſdem Arithmeticæ diſpoſitionis; & M, ſit vnitas denominata per L. Dico, quod A, eſt æqualis M. Aliàs
Coroll. 2. pr. 21. 2. erit A, maior, vel minor M. Sit maior; igitur in aliqua multitudine ſumptæ à prima vnitates in A, diſpoſitæ implent M: ſit huiuſmodi multitudinis numerus B, qui

vnitate

vnitate adiecta fiat C; ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sumptę à prima in multitudine numeri C, sunt maiores M; quod est absurdum: non est igitur A, maior M. Sit minor; & data proportione minoris inæqualitatis A, ad M, inueniatur altera maior, quæ sit numeri I, quem L, metiatur per D, ad E, numerum vnitate maiorem; & & ipsius D, fiat multiplex F, per N, quadratum compositi ex excessu consequentium, & vnitate; & datis tribus numeris F, excessu dispositionis O, & P, aggregato ex O, & binario, quartus inueniatur G, qui metiatur numerum non minorem F, per planum GO, auctum P; & sumantur vnitates in A, dispositæ à prima in multitudine numeri G; & assumptarum summa sit H: constat H, esse portionem ipsius A; & æqualem producto ex numero G, in planum GO, auctum P, denominato per multiplex eiusdem producti secundum L, auctum N: quia autem productus ex G, in planum GO, auctum P, non est minor F; etiam denominatus per sui ipsius multiplicē secundum L, auctum N, non est minor F, denominato per multiplicem F, secundum L, auctum N; & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per N,) non est minor D, denominato per multiplicem D, secundum L, auctum vnitate; est autem I, multiplex D, secundum L; & I, auctus vnitate est E; ergo H, non est minor D, denominato per E: sed, quia D, ad I, est vt vnitas ad L; vel vt M, (vnitas denominata per L,) ad vnitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad M; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus per E, ad vnitatem habet maiorem proportionē, quam A; maior igitur est D, denominatus per E, quàm A; & non est H, minor D, denominato per E; ergo H, est maior A, pars toto, quod est absurdum: non igitur A, minor est M, neque maior: ergo A, est æqualis M. Quod, &c.

Def. 10.
Pr. 21. 2.
Pr. 25. 1.
Pr. 22. 2.
Pr. 20. 2.
Pr. 44. 1.

# Theor. 22. Propoſ. 24.

*Vnitates denominatæ ſolidis numerorũ Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex plano exceſſus conſequentium Arithmeticè diſpoſitorum, & multitudinis aſſumptarum ducto in ſe ipſum auctum eodem exceſſu, & binario, ad compoſitum ex eodem exceſſu, & vnitate.*

A. 2. B. 3. D. 6. C. 11. L. 22. E. 66. F. 4. I. 12. G. 264. H. 16.
R. $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{280}$ S ——————————————

SInt R, quotlibet vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, cum exceſſu B, ſumptæ à prima in multitudine numeri A; ſuccedentes verò in infinitum ſint diſpoſitæ, & aggregatæ in S; & planum AB, ſit D; & D, auctus B, & binario ſit C; & ex ductu C, in A, fiat L; & ex L, in B, fiat E: conſtat E, eſſe productum ex D, in C: ſit F, compoſitus ex B, & vnitate. Dico R, ad S, eſſe, vt E, ad F. Ducatur F, in B, vt fiat I: conſtat I, eſſe compoſitum ex quadrato, & numero B: ducatur etiam F, in E, vt fiat G: quoniam E, eſt productus LB; ergo G, eſt productus L BF; eſt autem I, productus BF; ergo G, eſt productus LI:

L I: fiat ipsius F, quadratum H: constat R, esse æquales Pr. 20. 2.
L, denominato per duplum G, auctum duplo H; & ag- Pr. 23. 2.
gregatas R, S, æquales esse vnitati denominatæ per duplum I; Ergo R, ad aggregatas R, S, ita se habent vt L, denominatus per duplum G, auctum duplo H, ad vnitatem denominatam duplo I; & multiplicando per 2. vt L, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem denominatam per I; & multiplicando per I, vt productum L I, videlicet G, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem; & (multiplicando per G, auctum H,) ita se habent R, ad aggregatas R, S, vt G, ad compositum ex G, H; & diuidendo, R, ad S, ita se habent vt G, ad H; uidelicet ut planum F E, ad quadratum F; & (diuidendo per F,) sunt R, ad S, ut E, ad F. Quod, &c.

## Theor. 23. Prop. 25.

*Productus duorum laterum est maior, quàm vt ad eorumdem differentiam sit, vt minus latus ad vnitatem; & excessus est minoris lateris quadratus.*

A. 5. C. 3. B. 2.

SInt duæ magnitudines A, B; quarum sit B, minor; & differentia C. Dico quod productus AB, minutus quadrato B, ad C, est vt B, ad vnitatem. Quoniã A, æqualis est aggregato C, B; productus AB, est æqualis aggregato producti C B, & quadrati B; ergo produ-

ctus

ctus AB, minutus quadrato B, eſt æqualis producto C B; eſt autem productus CB, ad C, vt B, ad vnitatem; ergo productus AB, minutus quadrato B, ad C, eſt vt B, ad vnitatem. Quod, &c.

## Theor. 24. Prop. 26.

*Vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum, quotlibet aſſumptæ ſunt minores vnitate denominatæ ſolido ſub duplo exceſſu, & minimis numeris.*

B. 2. C. 5. 8. E. 11. F. 14.
A $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ D. 6.

Sint in A, diſpoſitæ quotlibet vnitates denominatæ ſolidis Arithmeticè diſpoſitorum; quorum primus B; ſecundus C; & duplus exceſſus conſequentium D. Dico A, minores eſſe vnitate denominata ſolido BCD. Arithmeticè diſpoſitorum, qui adhibentur in denominatione vnitatum A, ſint penultimus E, & vltimus F:
Pr. 4. 2. ergo A, ſunt æquales aggregato ex intermedijs, præter B, F, denominato per planoplanum BCEF; ergo A, ad vnitatem ſunt, vt aggregatum ex intermedijs præter B, F, ad planoplanum BCEF; videlicet proportionem habent compoſitã ex proportionibus intermediorũ præter B, F, ad exceſſum planorum EF, BC, & huius exceſſus
Prop. 3. 2. ex. ad planoplanum BCEF: eſt autem proportio intermediorum præter B, F, ad exceſſum planorum E F, B C,
eadem

eadem proportioni vnitatis ad D; & proportio excessus planorum EF, BC, ad planoplanum BCEF, minor proportione vnitatis ad planum BC; vel multiplicando per D, minor proportione D, ad solidum DBC; ergo ex æquo proportio intermediorum preter AF, ad planoplanum BCEF, minor est proportione vnitatis ad solidum DBC; & aggregatum intermediorum præter B, F, denominatum planoplano BCEF, videlicet A, minor est vnitate denominata solido DBC. Quod, &c. Pr.25.2.

## Corollarium Primum.

*Vnde constat vnitates denominatas solidis numerorum Arithmeticè dispositorum in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.* Pr.15.1.

## Corollarium Secundum.

*Patet etiam, quod vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum in aliqua multitudine sunt à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarũ earumdẽ in infinitũ.* Pr.16.1.

Theor.

# Theor. 25. Prop. 27.

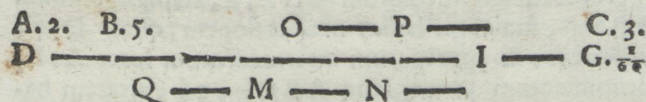
*Vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales vnitati denominatæ ſolido ſub duplo exceſſu, & minimis numeris.*

A. 2. B. 5. C. 3.
D G. $\frac{1}{60}$
H K

SInt numerorum Arithmeticè diſpoſitorum minimi numeri A, B; quorum exceſſus C; & vnitates denominatæ ſolidis eorumdem in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſint in D; & vnitas denominata ſolido ſub duplo C, & plano AB, ſit G. Dico D, eſſe æqualem G.
Coroll. 2. Alias erit D, maior, vel minor G: ſit maior; igitur in ali-
pr. 26. 2. qua multitudine ſumptæ D, à prima implent G: ſit huiuſmodi multitudinis numerus H, qui vnitate adiecta
Def. 10. fiat K; ergo aliquot diſpoſitæ à prima magnitudines D,
Pr. 26, 2. ſumptæ in multitudine numeri K, ſunt maiores G; quod eſt abſurdum: non eſt igitur D, maior G.

Sit D, minor G; & ſit defectus I; & vt I, ad G, ita fiat plani AB, quadratus ad Q; & ex diuiſione Q, per planũ
Pr. 7. 2. A B, fiat M; & inueniatur numerus N, qui multiplicando ſe ipſum auctum numero C, producat numerum non

minorem

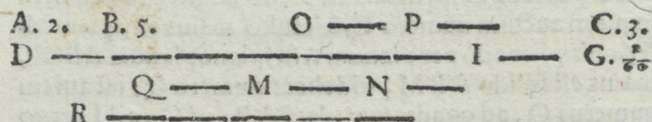



minorem M; & inter Arithmeticè diſpoſitos inueniantur duo numeri conſequentes O, P, maiores numero N; ergo etiam planum O P, maius eſt plano numeri N, ducti in ſeipſum auctum numero C; & multò maius eſt, quam M; & (multiplicando per planum AB,) planoplanum ABOP, maius eſt ſolido A B M, videlicet numero Q; eſt autem numerus Q, ad quadratum plani A B, vt G, ad I; ergo planoplanum ABOP, ad quadratum plani AB, maiorem habet proportionem, quam G, ad I; & per conuerſionem rationis, planoplanum ABOP, ad exceſſum eiuſdem ſuprà quadratum plani AB, minorem habet proportionem, quàm G, ad D; habet autem exceſſus planoplani ABO P, ſupra quadratum plani A B, ad exceſſum planorum O P, A B, proportionem eamdem, quàm planum A B, ad vnitatem; vel eamdem, quàm vnitas ad vnitatem denominatam plano A B; vel (diuidendo per duplum C,) eamdem, quàm vnitas denominata duplo C, ad vnitatem denominatam ſolido ſub duplo C, & AB, videlicet ad G; ergo ex æquali in perturbata planoplanum ABOP, ad exceſſum planorum O P, A B, minorem habet proportionem, quâm vnitas denominata duplo C, ad D; & conuertendo exceſſus planorum O P A B, ad planoplanum A B O P, maiorem habet proportionem, quàm D, ad vnitatem denominatam duplo C; eſt autem aggregatum intermediorum numerorum Arithmeticè diſpoſitorum inter A, P, ad exceſſum planorum O P, AB, vt vnitus ad duplum C; vel vt vnitas denomina-

Pr. 25. 2.

Pr. 3. 2.

ta duplo C, ad vnitatem; ergo ex æquali in perturbata aggregatum intermediorum inter A, P, ad planoplanum A B O P, maiorem habet proportionem, quàm D, ad vnitatem; & aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planoplano A B O P, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quàm D, ad eamdem vnitatem; Ergo aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planoplano ABOP, maius eſt quàm D:




quot autem ſunt inter A, P, intermedij, totidem aſſumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt in D; quarum aſſumptarum aggregatum ſit R: conſtat R, eſſe partem, vel portionem ipſius D; & conſtat etiam R, eſſe æqualem aggregato intermediorum A, P, denominato per planoplanum A B O P; ergo R, eſt maius D, pars toto, quod eſt abſurdum: non ergo D, eſt minor G, neque maior; ergo D, eſt æqualis ipſi G. Quod, &c.

Pr. 4. 2.



Theor.

# Theor. 26. Prop. 28.

*Vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum, quotlibet assumptæ ad succedentes in infinitum sunt, vt excessus plani, qui fit à maximis numeris adhibitus in denominatione assumptarum supra planum, qui fit à minimis, ad idem planum à minimis contentum.*

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.
F. $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ G. ———————

NVmerorum Arithmeticè dispositorum sint A, B, minimi cum excessu E; & sint F, quotlibet assumptæ, & aggregatæ vnitates denominatæ solidis numerorum dispositorum Arithmeticè ab A, B; & in ipsarum F, denominatione sint adhibiti numeri C, D, maximi; & ipsis F, succedentes in infinitum dispositæ, & aggregatæ sint G. Dico F, ad G, esse vt excessus planorum CD, AB, ad planum AB. Quoniam F, sunt æquales aggregato intermediorum Arithmeticè dispositorum inter A, D, denominato per planoplanum AB CD; & G, sunt æquales vnitati denominatæ solido sub duplo E, & plano CD; igitur F, ad G, sunt vt aggregatum intermediorum inter A, D, denominatum pla- Pr. 4. 2. Pr. 27. 2.

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.
F. $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ G. ————————

noplano A B C D, ad vnitatem denominatam ſolido ſub duplo E, & plano CD; & multiplicando per planum C D, ſunt vt aggregatum intermediorum A, D, denominatum plano A B, ad vnitatem denominatam duplo E; & multiplicando per duplum E, vt exceſſus planorum C D, A B, ( eſt enim exceſſus huiuſmodi multiplex aggregati intermediorum inter A, D, vt duplum E, vnitatis ) denominatus plano A B, ad vnitatem; & multiplicando etiam per planum AB, ſunt F, ad G, vt exceſſus planorum CD, AB, ad planum AB. Quod, &c. Pr. 3. 2.

*Finis Libri Secundi.*



NOVAE

# NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ,

## SEV De Additione Fractionum

## LIBER TERTIVS,

In quo eorum, quæ ſuperioribus Libris demonſtrata ſunt, generaliora traduntur principia.

## Theorema I. Propoſitio I.

*Diſpoſitis quomodolibet magnitudinibus, vt aßumptis totidem ſemper ſecundum aliquem numerum, ſingulæ excedant ſingulas præcedentes pariter totidem ſumptas ordinis eiuſdem; ex denominatione huiuſmodi exceſſuum magnitudinum ordinis eiuſdem per productum tùm ex magnitudinibus, quarum ſunt exceßus, tùm etiam ex inter-*

*medijs*

*medijs, fiunt fractiones, quarum aggregatum est excessus productorum totidem laterum ab extremis hinc inde, denominatus per productum dupli numeri laterum ab ijsdem extremis.*

A—B—C—D—E—F—G—H—
I—K—L—M—N— P—
Q—R—S—T—X—Y—

DIspositis quomodolibet magnitudinibus A, B, C, D, E, F, G, vt assumptis totidem semper secundum aliquem numerum, vtpote singulæ D, E, F, superent singulas totidem sumptas præcedentes A, B, C, & similiter E, F, G, superent B, C, D, & sic deinceps; ex denominatione excessus D, A, per productum earumdem excedentium D, A, & intermediarum B, C, fiat fractio I; & similiter ex denominatione excessuum E, B; F, C; G, D; H, E, per productos B C D E, CDEF, DEFG, EFGH, fiant fractiones K, L, M, N; & quot sunt A, B, C, vel D, E, F, &c. totidem sint extremæ maximæ F, G, H, & minimæ A, B, C; & ex denominatione excessus producti extremarum hinc inde FGH, ABC, per productum omnium earumdem extremarum ABCFGH, fiat fractio P. Dico I, K, L, M, N, aggregatas æquales esse P. Ex totidem semper consequentibus A B C, BCD, &c. fiant producti Q, R, S, T, X, Y: quoniam Q, est productum ABC; & R, productum BCD; planum QR, est productum ex productis ABC, BCD; ergo A, D, & productus A B C D, sunt homologi rationis eiusdem laterum Q, R, & eorumdem laterum plani

QR,

QR; ergo excessus D, A, ad productum ABCD, est vt excessus R, Q, ad planum QR; ergo excessus D, A, denominatus producto ABCD, videlicet fractio I, est æqualis excessui R, Q, denominato plano QR: similiter demonstrabimus K, L, M, N, æquales excessibus S, R; T, S; X, T; Y, X, denominatis planis RS, ST, TX, XY; ergo colligendo I, K, L, M, N, sunt æquales excessibus consequentium Q, R, S, T, X, Y, denominatis eorumdem consequentiũ planis; videlicet vni excessui extremorum Y, Q, denominato eorumdem extremorum plano QY: est autem Y, productum FGH; & Q, productum ABC; ergo excessus Y, Q, denominatus plano QY, est æqualis excessui productorum FGH, ABC, denominato producto ABCFGH, videlicet fractioni P: ergo I, K, L, M, N, compositæ, & aggregatæ sunt æquales P. Quod, &c. Pr. 7. 1.

# Theor. 2. Prop. 2.

*Dispositis Arithmeticè magnitudinibus, excessus producti quotlibet laterum à maximis extremis, suprà productum totidem laterum à minimis extremis, ad aggregatum productorum numeri laterum vnitate minoris factorum ab ijsdem dispositis consequentibus, præter primam, & vltimam, habet proportionem compositam, tùm excessus dispositionis, tùm etiam numeri multi-*

*tudinis*

***tudinis laterum productorum excedentium ad vnitatem.***

A—B—C—D—E—F—G—H—

SInt Arithmeticè diſpoſitæ quotlibet magnitudines A, B, C, D, E, F, G, H; & à maximis extremis fiat productum trium laterum FGH; & à minimis extremis productum totidem laterum A B C. Dico exceſſum productorum F G H, A B C, ad aggregatum productorum duorum laterum, qui fiunt à conſequentibus, præter primam, & vltimam A, H, videlicet ad compoſitum ex planis BC, CD, DE, EF, FG, habet proportionem compoſitam, tùm exceſſus B, A, tùm etiam ternarij numeri multitudinis laterum F, G, H, ad vnitatem. Sit E, in diſpoſitione propoſita proxima minor F: quoniam exceſſus H, E, ad exceſſum B, A, eſt vt 3. multitudo numerorum F, G, H, ad vnitatem; addita communi proportione exceſſus B, A, ad vnitatem, ergo exceſſus H, E, ad vnitatem habet proportionem compoſitã, tùm exceſſus B, A, tùm ternarij ad vnitatem: ducatur E, in proximas maiores magnitudines F, G, vt fiat EFG, productus totidem laterum, quot eſt FGH; ergo planum FG, ad productum EFG, eſt vt vnitas ad E; eſt autem productus EFG, ad productum FGH, vt E, ad H; & diuidendo, productus EFG, ad exceſſum productorum F G H, EFG, vt E, ad exceſſum H, E; ergo ex æquali planum FG, ad exceſſum productorum FGH, EFG, eſt vt vnitas ad exceſſum H, E; & conuertendo, exceſſus productorum F G H, E F G, ad planum F G, eſt vt exceſſus H, E, ad vnitatem: ſimiliter demonſtrabimus, quòd ſinguli exceſſus productorum EFG, DEF, CDE, BCD, ABC, ad ſingula plana EF, DE, CD, BC, AB, ſunt vt

exceſſus

excessus H, E, ad vnitatem: ergo colligendo, excessus productorum FGH, ABC, ad aggregatum planorum AB, BC, CD, DE, EF, FG, est vt excessus H, E, ad vnitatem; videlicet proportionem habet compositam, tùm excessus B, A, tùm etiam numeri multitudinis laterum F, G, H, ad vnitatem. Quod, &c.

## Theor. 3. Prop. 3.

*Dispositis Arithmeticè quotlibet magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem semper consequentium, sunt æquales aggregato productorum numeri laterum binario minoris, factorum ab ijsdem dispositis consequentibus, præter primam, & vltimam, denominato per planum sub duobus totidem hinc inde extremarum productis numeri laterum vnitate minoris.*

A — B — C — D — E — F — G —
H — I — K — L — M —
N — O — P — Q — R —

SInt dispositæ Arithmeticè magnitudines quotcunq; A, B, C, D, E, F, G; & vnitates denominatæ productis earumdem (ex.gr.) quaternarum sint H, I, K, L; & aggregatum productorum ex binis ijsdem, præter primam A, & vltimam G, denominatum per planum sub

A — B — C — D — E — F — G —
H — I — K — L — M —
N — O — P — Q — R —

duobus ternorum laterum hinc inde extremorum productis ABCEFG, ſit M. Dico, quod H, I, K, L, ſunt æquales M. Sumantur A, B, C, D, E, F, G, ternæ; & ſingularum, quæ ternę ſumuntur exceſſus ſupra ſingulas præcedentes denominentur productis earumdem, quarum ſunt exceſſus, & intermediarum (qui producti ſunt ſinguli quaternorum laterum) vt fiant fractiones N, O, P, Q, & exceſſus productorum à ternis hinc inde extremis EFG, ABC, denominatus omnium earumdē extre-
Pr. 1.3. morum producto ABCEFG, ſit R; ergo N, O, P, Q, ſunt æquales R: & quia N, O, P, Q, ſinguli ſunt exceſſus earum, quæ ternæ ſumuntur denominati productis quaternarum (vt exceſſus D, A, denominatus producto AB CD,) & H, I, K, L, ſingulæ ſunt vnitates denominatæ ſimiliter; ergo ſinguli N, O, P, Q, ad ſingulas H, I, K, L, ſunt vt exceſſus D, A, ad vnitatem; videlicet proportionem habent compoſitam exceſſus D, A, ad exceſſum conſequentium B, A, & huius ad vnitatem: eſt autem exceſſus D, A, ad exceſſum B, A, vt 3. ad vnitatem; ergo exceſſus D A, ad vnitatem habet compoſitam proportionem tùm exceſſus B, A, tùm etiam 3. ad vnitatem:
Pr. 2 3. quæ compoſita eadem eſt proportioni exceſſus productorum trium laterum ab extremis factorum EFG, ABC, ad aggregatum productorum ex binis ijſdem, præter A, G; & (diuidendo per productum omnium extremarum ABCEFG,) eadem eſt proportioni R, ad M: ergo ſingulæ magnitudines N, O, P, Q, ad ſingulas H, I, K, L, ſunt vt R, ad M; & colligendo omnes, N, O, P, Q, ad omnes H, I, K, L, ſunt vt R, ad M; & permutan-

do,

do, quia N, O, P, Q, ſunt æquales R; etiam H, I, K, L, ſunt æquales M. Quod, &c.

# Theor. 4. Propoſ. 4.

*Diſpoſitis Arithmeticè quotlibet magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper in diſpoſitione, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productùm ex minimis numeri laterum vnitate minoris, tùm ad numerum laterũ eiuſdem producti, tùm etiam ad exceſſum diſpoſitionis Arithmeticæ.*

B —— C —— D —— —— E —— F —— G ——
A —— —— —— —— —— —— —— —— —— —— H ——

SInt diſpoſitæ Arithmeticè quotlibet magnitudines, quarum B, C, D, minimæ; & E, F, G, maximæ, cum exceſſu H; & vnitates denominatæ productis quatuor ſemper laterum ſint A. Dico, quòd A, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum BCD, tùm ad 3. numerum laterum B, C, D, tùm etiam ad H. Quoniam B, C, D, &c. ſunt Arithmeticè diſpoſitæ, ergo A, ſunt æquales aggregato productorum duorum ſemper laterũ ex ipſis diſpoſitis præter B, G, denominato per planum Pr. 3. 3.

B —— C —— D —— —— E —— F —— G ——
A —— —— —— —— —— —— —— —— —— H ——

ex productis trium laterum BCD, EFG: ergo A, ad vnitatem sunt vt aggregatum productorum duorum semper laterum ex dispositis præter B, G, ad planum ex productis trium laterum BCD, EFG; videlicet proportionem habent compositam dicti aggregati productorum duorum laterum à consequentibus præter B, G, ad differentiam productorum trium laterum ab extremis EFG, BC D, & huiusmodi differentiæ ad eorumdem productorum
Pr. 2.3. planum BCDEFG; aggregatum autem productorum duorum laterum à consequentibus ad differentiam productorum trium laterum ab extremis proportionem habet compositam vnitatis tùm ad 3. numerum laterum B CD, tùm etiam ad H; ergo A, ad vnitatem habent proportionem compositam vnitatis tùm ad 3. tùm ad H, & differentiæ productorum EFG, BCD, ad productum
Pr. 25.2. BCDEFG: quoniam autèm productum BCDEFG, maius est quàm vt ad differentiam productorum EFG, BCD, eamdem habeat proportionem, quam productus BCD, ad vnitatem; conuertendo, differentia productorum EFG, BCD, ad productum BCDEFG, minorem habet proportionem, quàm vnitas ad productum BCD; ergo (addendo communem proportionem compositam vnitatis tùm ad 3. tùm etiam ad H,) A, sunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compositam vnitatis tùm ad productum BCD, tùm ad 3. numerum laterum BCD, tùm etiam ad H. Quod, &c.



Corol-

## Corollarium Primum.

*Vnde constat, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper magnitudinum Arithmeticè dispositarũ, quotlibet assumptæ sunt minores vnitate denominata solido sub producto à minimis numeri laterum vnitate minoris, sub eodem laterum numero, & sub excessu dispositionis.*

## Corollarium Secundum.

*Constat præterea, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper magnitudinum Arithmeticè ordinatarum, in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt extensionis finitæ.* Pr. 15. 1.

## Corollarium Tertium.

*Manifestum tandem est, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper* Pr. 16, 1.

*magni-*

*magnitudinum Arithmeticè ordinatarũ, in aliqua multitudine ſunt à prima, quæ propoſitam implent extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum.*

## Theor. 5. Prop. 5.

*Diſpoſitis Arithmeticè magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper in diſpoſitione, ordinatæ in infinitum, & compoſitæ ad vnitatem habent proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ex minimis numeri laterum vnitate minoris, tùm ad numerum laterum eiuſdẽ producti, tùm etiam ad exceſſum diſpoſitionis Arithmeticè.*

A —— B —— C —— —— —— —— —— ——
E —— —— —— —— —— —— —— —— ——
F —— G —— —— —— —— —— —— ——
H —— I —— D ——

MAgnitudinum Arithmeticè diſpoſitarũ in infinitum ſint minimæ ABC, & exceſſus D; vnitates autem denominatæ productis quatuor ſemper laterum ordi-

ordinentur, & aggregentur in E. Dico, quod E, ad vnitatem habet proportionem compositam vnitatis tùm ad productum ABC, tùm ad 3. numerum laterum ABC, tùm etiam ad excessum D. Aliàs E, maior, est vel minor, quàm vt ad vnitatem habeat eamdem proportionẽ compositam: sit maior; & sit excessus F; & ab E, deducto F, relinquatur G; ergo G, ad vnitatem habet prædictam proportionem compositam: quoniam E, maior est G; ergo in aliqua multitudine sumptæ à prima magnitudines in E, dispositæ implent G: sit huiusmodi multitudinis numerus H; qui adiecta vnitate fiat I; ergo magnitudines in E, dispositæ sumptæ in multitudine I, sunt maiores G; videlicet sunt maiores, quàm vt ad vnitatẽ habeant prædictam proportionem compositam; quod est absurdum: ergo E, non est maior, quàm vt ad vnitatem habeat proportionem compositam vnitatis tùm ad productum A B C, tùm ad 3. numerum laterum A B C, tùm etiam ad excessum D.

Coroll. 3. prop. 4. 3. Def. 10.

Coroll. 1. prop. 4. 3.

A —— B —— C —— —— O —— P —— S ——
E —————————————————— F ——
G ————————————————————
Q ———— M ———— N —— R ——— D —

Sit E, minor G; & sit defectus F; & vt F, ad G, ità fiat producti A B C, quadratus ad Q; & ex diuisione Q, per productum ABC, fiat quotiens M; & magnitudinis M, tamquàm producti totidem laterum æqualium, quot sunt A B C, latus inueniatur, vtpote radix cubica, quæ sit N; & inter magnitudines Arithmeticè dispositas inueniantur tres, vel quot sunt A, B, C, totidem magnitudines consequentes O, P, S, maiores prædicta radice N: ergo productum O, P, S, maius est producto totidem laterum æqualium ipsi N, videlicet magnitudine

A —— B —— C ——— O —— P —— S ——
E ——————————————————— F ——
G ————————————————————————
Q ———— M ——— N —— R ——— D ——

gnitudine M; & multiplicando per productum A B C, productum ABCOPS, maius est producto ABCM, videlicet Q; est autem Q, ad quadratum producti ABC, vt G, ad F; ergo productum ABCOPS, ad quadratum producti ABC, maiorem habet proportionem, quam G, ad F; & per conuersionem rationis, productum ABCOPS, ad excessum eiusdem supra quadratum producti ABC, minorem habet proportionem, quàm G, ad E; habet autem excessus producti ABCOPS, supra quadratum producti A B C, ad excessum productorum OPS, ABC, proportionem eamdem, quam productus ABC, ad vnitatem; qua communi adiecta, productus ABCOPS, ad excessum productorum OPS, ABC, minorem habet proportionem, quàm composita G, ad E, & producti ABC, ad vnitatem; sed excessus productorum OPS, A B C, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium inter Arithmeticè dispositas præter A,S, habet proportionem compositam tùm 3. numeri laterum A B C, tùm etiam excessus D, ad vnitatem; qua etiam communi adiecta, productus ABCOPS, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, habet minorem proportionem, quàm composita G, ad E, & producti ABC, ad vnitatem, necnon composita tùm numeri 3, tùm etiam excessus D, ad vnitatem; & est composita tùm producti ABC, tùm numeri 3. tùm etiam excessus D, ad vnitatem æqualis proportioni vnitatis ad G; quæ composita proportioni G, ad E, facit proportionem vnitatis ad E; ergo productus ABCOPS,

Pr. 25. 2.

Prop. 2. 3.

ad

ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, habet minorem proportionem, quàm vnitas ad E: sed productus ABCOPS, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, est vt vnitas ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, denominatum producto ABCOPS, quæ quidem fractio vocetur R; ergo vnitas ad R, habet minorem proportionem, quàm ad E; & propterea R, est maior E: tandem quot sunt producti duorum laterum consequentium præter A, S, totidem assumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum ordinatæ sunt, & compositæ in E: constat Prop.1.3. R, esse aggregatum huiusmodi assumptarum; & propterea R, esse portionem extensionis E, maiorem, minoris; quod est absurdum: non ergo E, minor est, neque maior; ergo idem est, quod ad vnitatem habet proportionem compositam vnitatis tùm ad productum ABC, tùm ad 3. numerum laterum ABC, tùm etiam ad excessum D. Quod, &c.

## Theor. 6. Prop. 6.

*In facta dispositione continua magnitudinum procedentium in infinitũ, differentiæ denominatæ planis dispositæ, & aggregatæ infinitæ sunt æquales vnitati denominatæ magnitudine, quæ est principium dispositionis.*

Sit dispositio continua magnitudinum procedentium in infinitum ab A; & differentiæ denominatæ planis

A —— C ——
B —— F ——
D —— E —— G —— H ——

in huiusmodi dispositione ordinentur in infinitum, & componantur in B. Dico quòd B, sunt æquales vnitati denominatæ per A. Sunt enim B, extensionis finitæ: nam assumptis quotlibet à prima, & in denominatione vltimæ assumptarum adhibita C, vna ex dispositis ab A:
Pr. 7. 1. constat assumptas æquales esse differentiæ C, A, denominatæ plano CA; & ad vnitatem se habere vt differentia C, A, ad planum CA; & conuertendo, vnitatem esse ad assumptas vt planum CA, ad differentiam C, A: sed maiorem habet proportionem planum CA, ad differentiam C, A, quàm A, ad vnitatem; vel maiorem quàm vnitas ad vnitatem denominatam per A; ergo unitas ad assumptas maiorem habet proportionem quàm ad unitatem denominatam per A; & propterea quotlibet as-
Pr. 15. 1. sumptæ sunt minores vnitate denominata per A: ergo B, sunt extensionis finitæ. Igitur si B, non sunt æquales vnitati denominatæ per A, necessariò maiores erunt, vel minores: ponantur maiores; & quoniam B, sunt exten-
Pr. 16. 1. sionis maioris vnitate denominata per A; sumi possunt in aliqua multitudine à prima, vt impleant vnitatem denominatam per A; sit huiusmodi multitudinis numerus
Def. 10. D, qui adiecta vnitate fiat E; ergo B, sumptæ in multitudine numeri E, sunt maiores vnitate denominata per A; quod est contra ea, quæ superius demonstrata sunt: non ergo B, sunt maiores vnitate denominata per A.

Supponantur minores; & sit defectus F; & ut F, ad unitatem denominatam per A, ita fiat A, ad G; & inter numeros dispositos ab A, inueniatur C, numerus maior G; ergo C, ad A, maiorem habet proportionem quàm

G, ad

G, ad A; uel quàm unitas denominata per A, ad F; & per conuersionem rationis, & conuertendo, excessus C, A, ad C, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem denominatam per A; sed C, ad planum AC, est ut unitas ad A, uel ut unitas denominata per A, ad unitatem; ergo ex æquali excessus C, A, ad planum AC, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem: est autẽ excessus C, A, ad planum A C, ut excessus C, A, denominatus plano A C, ad unitatem; ergo excessus C A, denominatus plano AC, ad unitatem habet maiorem proportionem, quàm B, ad unitatem: Assumantur ex fractionibus dispositis in B, tot ut inter assumptas habeatur ea, in cuius denominatione adhibetur magnitudo C; & assumptarum sit aggregatum H: constat H, esse portionem B; & esse æqualem excessui C, A, denominato plano AC; & propterea H, ad unitatem habere proportionem maiorem quàm B; & H, maiorem esse B, partem toto; quod est absurdum: non ergo B, sunt minores unitate denominata per A; sed neque maiores: ergo B, sunt æquales unitati denominatæ per A. Quod, &c. Pr.7. 1.

## Theor. 7. Prop. 7.

*Dispositis quomodolibet magnitudinibus procedentibus in infinitum, ut assumptis totidem semper secundùm aliquem numerum singulæ excedant singulas præcedentes pariter totidem sumptas ordinis eiusdem; ex denominatione huiusmodi excessuum ma-*

*gnitudinũ ordinis eiuſdem per productum tùm ex magnitudinibus, quarum ſunt exceſſus, tùm etiam ex intermedijs fiunt fractiones, quæ in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales vnitati denominatæ producto totidem magnitudinum, quæ ſunt in principio diſpoſitionis.*

A. B — C — D — E — — — O — P — R — S —
F ——————————————
I. G — H ———————— V ———
K ——————————————

SIt A, diſpoſitio magnitudinnm in infinitum procedentium, ut ſumptis exempli gratia ternis quibuslibet, ſingulæ excedant ſingulas præcedentes ordins eiuſdem; & ſint primæ tres B, C, D; & quarta ſequens E; & ſit F, diſpoſitio infinitarum fractionum, in quibus prædicti exceſsus denominantur productis ex magnitudinibus tùm excedentibus, tùm intermedijs; quarum fractionum prima eſt exceſsus E, B, denominatus producto BCDE. Dico quod F, æqualis eſt unitati denominatæ producto BCD. Eſt enim F, extenſionis finitæ: nam aſſumptis in F, quotlibet à prima in denominatione ultimæ aſumptarum adhibeantur O, P, R, S, magnitudines in A, diſpoſitæ; & ex ternis conſequentibus BCD, CDE, alijſq; deinceps diſpoſitis in A, utpote etiam ex PRS, fiant producti G, H, & deinceps alij, vtpote etiam V; quorum diſpoſitio in infinitum ſit I; conſtat aſſumptas
Pr. 1.3. æquales eſſe differentiæ V, G, denominatæ plano V, G, & ad vnitatem ſe habere vt differentia V, G, ad planum

GV;

G V; & conuertendo, vnitatem eſſe ad aſſumptas vt planum GV, ad differentiam V, G: ſed maiorem habet proportionem planum GV, ad differentiam V, G, quàm G, ad vnitatem; vel quàm vnitas ad vnitatem denominatam per G; ergo vnitas ad aſſumptas maiorem habet proportionem quàm ad vnitatem denominatam per G; & propterea quotlibet aſſumptæ ſunt minores vnitate denominata per G: ergo F, eſt finitæ extenſionis. Præterea differentiæ denominatæ planis in I, diſponantur in ſerie K; quarum prima eſt exceſſus H, G, denominatus plano GH: & quoniam magnitudines A, procedunt in infinitum; etiam producti earumdem I, procedunt in infinitum; ergo K, eſt extenſionis finitæ; & æqualis eſt vnitati denominatæ per G: & cum G, ſit productum B, in CD; & H, productum E, in CD; erit planum GH, productum BCDE, in CD: ergo GH, & planum GH, ſunt homologa rationis eiuſdem B, E, & producti BCDE: ergo exceſſus H, G, ad planum GH, eſt vt exceſſus E, B, ad productum BCDE; & fractio, in qua exceſſus H, G, denominatur plano GH, videlicet prima diſpoſitarum in K, æqualis eſt fractioni, in qua exceſſus E, B, denominatur producto BCDE, videlicet primæ diſpoſitarum in F: ſimiliter demonſtrabimus eaſdẽ ſingillatim magnitudines tùm in K, tùm in F, eſſe diſpoſitas, & ſunt ambæ diſpoſitiones K, & F, extenſionis finitæ, vt probauimus; ergo K, & F, congruunt inter ſe: cum ergo K, ſit æqualis vnitati denominatæ G, videlicet producto BCD; etiam F, eſt æqualis vnitati denominatæ producto BCD. Quod, &c.

Pr. 25. 1.
Pr. 15. 1.
Pr. 6. 3.
Ax. 2.



Probl.

# Probl. 1. Prop. 8.

***Datis extremis inæqualibus, intermediam inuenire, cuius, & vnius extremarum differentia plano denominata sit æqualis alij datæ magnitudini, quæ sit minor differentia extremarum plano denominata.***

A. 8. G. 7. B. 3. E $\frac{1}{7}$ F. 1 $\frac{1}{7}$
D. $\frac{1}{56}$ H. $\frac{4}{21}$ C. $\frac{5}{24}$

DAtæ ſint inæquales extremæ A, B; quarum differentia plano denominata ſit C; & data ſit alia magnitudo D, minor C. Opportet extremas A, B, intermediam ihuenire; cuius, & A, differentia plano denominata ſit æqualis D. Vel eſt A, maior B; vel minor: ſit maior; & ex multiplicatione DA, fiat E; qui auctus vnitate ſit F; & per F, diuidendo A, fiat quotiens G. Dico, quòd G, eſt intermedia A, B, & quod exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D. Quoniam G, multiplicando F, producit A; & multiplicando aggregatum E, & vnitatis producit aggregatũ plani GE, & G; eſt autem F, æqualis E, & vnitati; igitur A, eſt æqualis plano GE, & G; & A, eſt maior G; ergo communi ablata G, exceſſus A, G, eſt æqualis plano GE; & diuidendo per G, exceſſus A, G, denominatus per G, eſt æqualis E; videlicet plano DA; & diuidendo per A, exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D: non eſt autem G, æqualis, neque minor B; nam exceſſus A, G, plano denomi-

nominatus, videlicet D, æqualis esset vel maior C, contrà hipothesim; ergo G, est intermedius A, B; & excessus A, G, plano denominatus est æqualis D. Sit A, minor B; & conuertendo, B, maior A; & quoniam D, est minor C; sit defectus H, & inueniatur E, intermedius B, A, vt excessus B, E, plano denominatus æqualis fiat H: quoniam A, E, B, sunt magnitudines continuè dispositæ; aggregatum differentiarum A, E; E, B, planis denominatarum est æquale C; videlicet aggregato D, H; est autem differentia E, B, plano denominata æqualis H; ergo residua differentia, videlicet defectus A, E, plano denominatus est æqualis D. Quod, &c.

## Theor. 8. Prop. 9.

*In continua dispositione magnitudinum infinitarum inter extremas quaspiam magnitudines ab vna ad alteram procedentium, differentiæ planis denominatæ dispositæ in infinitum, & aggregatæ, sunt æquales vni differentiæ extremarum plano denominatæ.*

A—— ——D—E——B—  L—F—G—
C————————————  H——
P———————————  N——

SInt dispositæ quomodolibet magnitudines infinitæ in continua dispositione procedentes inter extremas

A ——— D — E —— B — L — F — G —
C ——————— H —
P ——————— N —

mas A, B, ab A, quæ sit in principio dispositionis ad B; & infinitæ differentiæ planis in dispositione denominatę aggregentur in C; & sit L, differentia A, B; & ex denominatione L, per planum A B, fiat H. Dico, quòd C, est æqualis H. Est enim C, extensionis finitæ: nam assumptis in C, quotlibet à prima in denominatione vltimæ assumptarum adhibeantur D, E, magnitudines inter
Prop.7.1. A, B, dispositæ: constat, quòd assumptæ sunt æquales
Prop.7.1. differentiæ denominatæ plano AE; est autem differentia denominata plano AE, vnà cum differentia denominata plano E B, æqualis H; ergo differentia denominata plano A E, minor est H; & propterea quotlibet assumptæ
Pr.15.1. sunt minores H: igitur C, est finitæ extensionis. Iam si C, non est æqualis H, necessariò maior erit, vel minor: sit maior; & quoniam C, est maioris extensionis H; sumi possunt ex magnitudinibus dispositis in C, aliquot à prima, vt impleant H: sumantur, & sit ipsarum multi-
Def.10. tudinis numerus F; qui vnitate adiecta fiat G; ergo C, sumptæ à prima in multitudine numeri G, sunt maiores H; quod est contrà superius demonstrata: non est ergo C, maior H. Sit minor; & inueniatur D, intermedia extremas A, B; vt differentia A, D, plano denominata sit
Prop.8.3. æqualis C; ergo differentia A, D, est minor L: & quoniā ab A, ad B, sunt dispositæ magnitudines infinitæ; etiam differentiæ in ea dispositione sunt infinitæ; & simul compositæ sunt æquales vni differentiæ extremarum L; ergo vel prima ex huiusmodi differentijs est maior differentia
Pr.16.1. A, D; vel si minor plures à prima sumptæ secundùm aliquem numerum implent differentiam A, D; qui numerus

vnitate

vnitate adiecta fiat N; ergo differentiæ in diſpoſitione A, ad B, ſumptæ à prima ſecundùm numerũ N, ſunt maiores differentia A, D: ſumantur igitur ſecundùm numerum N, magnitudines ab A, diſpoſitæ ad B, præter A; & aſſumptarum ſit vltima E; totidemque ſumantur ex fractionibus diſpoſitis in C; quarum aggregatum ſit P: conſtat P, eſſe portionem ipſius C; & differentiam A, E, maiorem differentia A, D; & propterea differentiam A, E, plano denominatam, videlicet P, eſſe maiorem differentia A, D, plano denominata, videlicet C; ergo portio eſt maior toto; quod eſt abſurdum: non eſt ergo C, minor H; ſed neque maior: ergo C, eſt æqualis H. Quod, &c. Prop. 7. 1.

## Theor. 9. Propoſ. 10.

*In continua diſpoſitione magnitudinum infinitarum inter extremas à prima ad vltimam procedentium, differentiæ illarum, quæ diſtant æquali ordinis interuallo denominatæ productis tùm earumdem, quarum ſunt differentiæ, tùm etiam intermediarum, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales differentiæ inter productum numeri laterum vnitate minoris ab ijs, quæ ſunt in principio diſpoſitionis, & homogeneam poteſtatem ab vltima, denominatæ plano ſub ijſdem producto, & poteſtate.*

A—I—K—M—O—S—T—D—E——B—
C ——————————————————
L—— F—— G——  H——
Q. V————————X—Z————R—
Y-- N——  P————

SInt diſpoſitæ quomodolibet magnitudines infinitæ in continua diſpoſitione procedentes inter extremas A, B, ab A, I, K, M, O, quæ ſint in principio diſpoſitionis ad B; & infinitæ differentiæ illarum, quæ diſtant æquali ordinis interuallo, vtpote ſemper binis relictis differentiæ A, M; I, O, &c. denominatæ productis AIKM, IKMO, &c. aggregentur in C; & ſit Q, diſpoſitio productorum numeri laterum vnitate minoris AIK, IKM, KMO, &c. in qua quidem diſpoſitione ſit V, productum AIK; & R, poteſtas totidem laterum à B; differentia verò R, V, ſit L; ex cuius denominatione per planum RV, fiat H. Dico quod C, eſt æqualis H. Eſt enim C, extenſionis finitæ; nam aſſumptis in C, quotlibet à prima, in denominatione vltimæ aſſumptarũ adhibeantur S, T, D, E, magnitudines inter A, B, diſpoſitæ; & in
Prop.1.3. diſpoſitione Q, ſint X,Z, producta STD, TDE: conſtat, quòd aſſumptæ ſunt æquales differentiæ denominatæ
Prop.7.1. plano VZ; eſt autem differentia denominata plano VZ, vnà cum differentia denominata plano ZR, æqualis H; ergo differentia denominata plano VZ, minor eſt H; & propterea quotlibet aſſumptæ à prima ex diſpoſitis in C,
Pr.15.1. ſunt minores H: igitur C, eſt finitæ extenſionis. Iam ſi C, non eſt æqualis H; neceſſariò maior erit, vel minor: ſit maior; & quoniam C, eſt maioris extenſionis H; ſumi
Pr.16.1. poſſunt ex magnitudinibus diſpoſitis in C, aliquot à prima, vt impleant H: ſumantur, & ſit ipſarũ multitudinis
Def.10. numerus F; qui vnitate adiecta fiat G; ergo C, ſumptæ à prima in multitudine numeri G, ſunt maiores H, quod eſt

contrà

contrà superiùs demonstrata: nō est ergo C, maior H. Sit minor; & inueniatur X, intermedia extremas V, R, vt differentia V, X, plano denominata sit æqualis C; & intelligātur V, X, esse potestates ipsi R, homogeneæ, quarū radices inueniantur Y, S: quia V, est productus magnitudinū inæqualium, & continuè dispositarum A, I, K; constat quòd Y, est intermedia extremas A, K; & quia X, est intermedia extremas V, R; differentia V, X, est minor differētia, V, R; & differētia Y, S, minor est differētia Y, B; & ablata communi differentia Y, K; differētia K, S, minor est differentia K, B: & quoniā in dispositione K, ad B, sunt magnitudines infinitæ, etiam differentiæ sunt infinitæ; & simul sumptæ sunt æquales vni differentiæ extremarum K, B; ergo vel prima ex huiusmodi differentijs est maior differentia K, S; vel si minor, plures à prima sumptæ secundum aliquem numerum implent differentiam K, S; qui numerus vnitate adiecta fiat N; ergo differentiæ in dispositione K, ad B, sumptæ à prima secundum numerum N, sunt maiores differentia K, S: Sumantur ergo secundum numerum N, magnitudines à K, dispositæ ad B, præter K; & assumptarum sit vltima T; quam sequantur aliæ duæ D, E; & in dispositione Q, sit Z, productum TDE; & quot sunt magnitudines assumptæ à K, vsque ad E, totidem sumantur ex fractionibus dispositis in C, à prima; quarum aggregatum sit P: constat P, esse portionem ipsius C; & differentiam K, T, esse maiorem differentia K, S; & addita communi differentia Y, K, differentiam Y, T, maiorem differentia Y, S; & propterea differentiam inter V, & homogeneam potestatem à radice T, maiorem differentia V, X; est autem differentia V, Z, maior differentia inter V, & homogeneam potestatem à radice T; ergo differentia V, Z, est multò maior differentia V, X, & ideò differentia V, Z, plano denominata maior est differentia V, X, plano denominata; videlicet

Prop. 8. 3. — Pr. 16. 1. — Def. 10. — Prop. 7. 1.

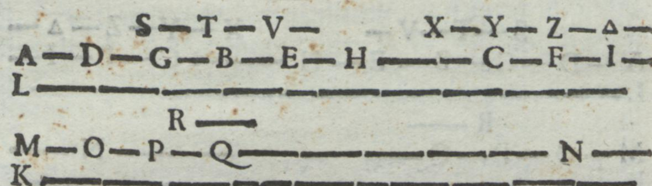
fractione C: est autem differentia V, Z, plano denominata æqualis P; ergo P, est maior C, portio toto; quod est absurdum: non est ergo C, minor H; sed neque maior: ergo C, est æqualis H. Quod, &c.

# Theor. 10. Prop. 11.

*Si plures continuæ dispositiones, in quibus differentiæ sint similes, magnitudinum infinitarum ità componantur in vnica dispositione, vt quæ sunt ordinis eiusdem sint similiter ordinatæ; differentiæ in singulis dispositionibus eodem ordine sumptæ, cum ijs, quæ sunt in ipsarum dispositionum principijs, denominatæ productis tùm earumdem, quarum sunt differentiæ, tùm etiam intermediarum dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales vni differentiæ productorum à primis, & ab vltimis extremis, eorumdem productorum plano denominatæ.*

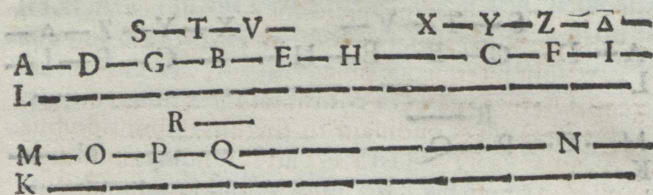
TRium continuarum dispositionum ex magnitudinibus infinitis inter binas extremas procedentium prima sit ab A, per B, ad C; secunda à D, per E, ad F; tertia à G, per H, ad I; in quibus differentiæ sint similes;

& quæ




& quæ componantur in vna diſpoſitione ab A, per D, G, B, &c. ad I, ità vt primæ A, D, G, ſecundæ B, E, H, & reliquæ deinceps ordinis eiuſdem, necnon vltimæ C, F, I, ſint ſimiliter ordinatæ; & ſingularum diſpoſitionum differentiæ denominatæ productis in huiuſmodi compoſita diſpoſitione (vtpote differentia A, B, denominata producto ADGB; & differentia D, E, producto DGBE; & ſic deinceps in infinitum) diſponantur, & colligantur in L; & à primis ADG, & vltimis CFI, producantur M, & N. Dico, quòd L, eſt æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Eſt enim L, extenſionis finitæ: nam aſſumptis in L, quotlibet à prima, in denominatione vltimæ aſſumptarum tres adhibeantur B, E, H, magnitudines inter A, I, diſpoſitæ; & Q, ſit productum BEH; & quoniam ſunt continuæ diſpoſitiones ABC, DEF, GHI; continua eſt etiam diſpoſitio MQN; & differentia M, Q, minor eſt differentia M, N; & differentia M, Q, plano denominata minor eſt differentia M, N, plano denominata: eſt autem differentia M, Q, plano denominata æqualis quotlibet aſſumptis in L; igitur quotlibet aſſumptæ in L, ſunt minores differentia M, N, plano denominata; ergo L, eſt finitæ extenſionis. Inter M, N, diſponantur homogenea producta in diſpoſitione ab A, ad I, vt fiant O, P, Q, producta DGB, GBE, BEH, & deinceps infinita; & eadem demonſtratione, qua oſtendimus Q, eſſe intermedium M, N; oſtendemus etiam O, P, & reliqua

Ex Dem. Prop. 1. 3.
Prop. 7. 1.
Prop. 1. 3.
Pr. 15. 1.

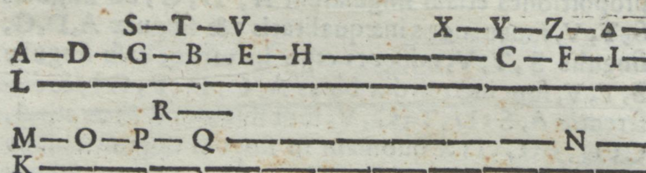



reliqua producta esse intermedia M,N; necnon O,P,esse intermedia M, Q; & sic dispositionem huiusmodi productorum inter M, N, esse continuam: sumatur præterea quælibet magnitudo R, inter M, N; & analogia (videlicet proportionum proportio) proportionis M, ad N, ad proportionem M, ad R, eadem esse concipiatur singularum proportionum A, ad C; D, ad F; & G, ad I, ad singulas proportiones A, ad S; D, ad T; & G, ad V, possibiles inueniri: & quoniam R, est inter M, N; si singulæ A, D, G, singulis C, F, I, sunt minores; ergo M, est minor N; & minor est proportio M, ad N, quàm M, ad R; & singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, sunt minores quàm singulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: sunt ergo singulæ C, F, I, singulis S, T, V, maiores: sunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & singularum A, D, G, ad singulas C, F, I, minoris inæqualitatis; ergo etiam proportiones singularum A, D, G, ad singulas S, T, V, sunt minoris inæqualitatis; & singulæ A, D, G, singulis S, T, V, minores. Si verò singulæ A, D, G, singulis C, F, I, sunt maiores; ergo M, est maior N; & maior est proportio M, ad N, quàm M, ad R; & singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, sunt maiores, quàm singulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: sunt ergo singulæ C, F, I, singulis S, T, V, minores: sunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & singularum A, D, G, ad singulas C, F, I, maioris inæqualitatis; ergo

Ex doctrina Logarithmorū.

propor-

proportiones etiam ſingularum A, D, G, ad ſingulas S, T, V, ſunt maioris inæqualitatis; & ſingulæ A, D, G, ſingulis S, T, V, minores ergo in vtroq; caſu ſingulæ S, T, V, ſunt intermediæ binas A, C; D, F; G I; & differentiæ A, S; D, T; G, V, ſunt minores differentijs A, C; D, F; G, I; & quoniam in ſingulis diſpoſitionibus ab A, ad C; à D, ad F; à G, ad I, ſunt magnitudines infinitæ; etiam differentiæ ſunt infinitæ; & ſimul compoſitæ ſingulis extremarum differentijs A, C; D, F; G, I, ſunt æquales; ergo vel primæ differentiæ in ſingulis huiuſmodi diſpoſitionibus differentijs A, S; D, T; G, V, ſunt maiores; vel ſi minores, plures à primis aſſumptæ Pr.16. 1. ſecundùm aliquos numeros implent differentias A, S; D, T; G, V; qui numeri ſingulis vnitatibus adiectis fiant X, Y, Z; quorum numerorum ſit maximus Y; cuius fiat multiplex △, iuxtà numerum magnitudinum A, D, G: ergo differentiæ in ſingulis diſpoſitionibus A, ad C; D, Def. 10. ad F; G, ad I, ſumptæ à primis iuxtà ſingulos numeros X, Y, Z, ſunt maiores differentijs A, S; D, T; G, V; & ſumptæ iuxtà numerum Y, ſunt multò maiores ijſdem differentijs A, S; D, T; G, V: igitur ſumantur ſecundùm numerum Y, magnitudines ab A, diſpoſitæ ad C; à D, ad F; à G, ad I, poſt ipſas A, D, G; & aſſumptarum ſint vltimæ B, E, H; quæ cum ſint ordinis eiuſdem reperientur in diſpoſitione ab A, ad I, conſequentes; & poſt eaſdem A, D, G, in ordine numeri △, & aliorum deinceps numerorum, qui ſunt proximè maiores ipſo △; & pariter in diſpoſitione productorum ab M, ad N, reperietur ipſorum BEH, productus Q, in eodem ordine numeri △, poſt M: quia ſingulę differentię A, B; D, E; G, H, ſunt ſingulis differentijs A, S; D, T; G, V, maiores; etiam differentia M, Q, maior eſt differentia inter M, & productum STV: & quia ſingulę proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, ad ſingulas proportiones




tiones A, ad S; D, ad T; G, ad V; & colligendo omnes ad omnes eamdem habent analogiam (siue proportionum proportionem) quæ est proportionis M, ad N, ad proportionem M, ad R; permutandoque, & conuertendo, sicut proportio M, ad N, æqualis est proportionibus A, ad C; D, ad F; G, ad I, ita proportio M, ad R, æqualis est proportionibus A, ad S; D, ad T; G, ad V; videlicet proportioni M, ad productum STV: ergo R, est æqualis producto STV; & differentia M, Q, maior est differentia M, R; ergo dispositio productorum M, O, P, Q, est continua magnitudinum infinitarum procedentium ab M, ad N: in continua ergò dispositione magnitudinum infinitarum inter extremas quaspiam magnitudines ab M, ad N, procedentium, differentiæ planis denominatæ disponantur in infinitum, & aggregentur in
Prop. 9. 3 K; ergo K, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ: & quoniam M, est productum A, in DG; & O, productum B, in DG; erit planum MO, productum AD GB, in DG; ergo M, O, & planum MO, sunt homologa rationis eiusdem A, B, & producti ADGB; ergo differentia M, O, ad planum MO, est vt differentia A, B, ad productum ADGB; & fractio, in qua differentia M, O, plano denominatur; videlicet prima dispositarum in K, est æqualis fractioni, in qua differentia A, B, denominatur producto ADGB; videlicet primæ dispositarum in L: similiter demonstrabimus easdem singillatim

gillatim magnitudines tùm in K, tùm in L, esse dispositas; & sunt ambæ dispositiones K, & L, extensionis finitæ, vt probauimus; ergo K, & L, congruunt inter se: cum ergo K, sit æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ; etiam L, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Quod, &c. Ax. 2.

## DEFINITIONES.

*Exposita rationali, & datis quotlibet, si rationalis ad aliam, quæ inuenitur habeat proportionem compositam ex proportionibus eiusdem rationalis ad singulas datas; vocetur inuenta, productus datarum.*

*Et datæ lineæ, dicantur, latera, producti.*

*Exposita rationali, & datis duabus alijs magnitudinibus; si vt prima datarum ad rationalem, ita fiat secunda ad aliam, quæ inuenitur; vocetur inuenta, fractio facta ex denominatione secundæ per primã.*

*Et ipsa secunda magnitudo, numerator fractionis.*

*Prima verò, denominator.*

*Et exposita rationalis, vnitas appelletur.*

Huiu-

Huiusmodi definitiones in Arithmetici voluminis calce appositas esse volui, vt faciliter quisq; possit Arithmetica Theoremata in Geometricos vsus conuertere, & demonstrationes in quantitate discreta expositas, in quantitate continua mutatis nominum interpretationibus adhibere.

*Finis Libri Tertij.*



*Omnium calculis approbandam, immò albis signandam lapillis Arithmeticam hanc Speculationem censuit Ouidius Montalbanus librorum Mathematicorum pro Eminentiss. & Reuerendiss. Principe Archiepiscopo Bononiæ Card. Nicolao Ludouisio Censor.*

*V. D. Antonins Bon Vicinus Pænit. pro eodem Eminentiss.*

*Bartholomæus Massarius Lib. Mathm. reuisor pro Reuerendiss. P. Inquisit.*

Imprimatur

*Fr. Vincentius Prætus à Serraualle Inquilit. Bononiæ.*



BONONIAE Typis Iacobi Montij. MDCL.

*Superiorum permissu.*